

RECHERCHES SUR LE MOUVEMENT DE ROTATION DES CORPS CELESTES.

PAR M. EULER.

1.

Si les corps celeſtes étoient parfaitement ſphériques, ou que leurs momens d'inertie par rapport à leurs axes principaux fuſſent égaux entr'eux, quelque mouvement de rotation qu'ils euſſent reçu une fois, ils le conſerveroient toujours, ſans changer ni de viteſſe ni d'axe de rotation, qui demeureroit toujours dirigé vers les mêmes points du ciel; & les forces dont ce corps eſt ſollicité vers les autres corps celeſtes, ne troubleroient rien dans ſon mouvement de rotation, puisque la force moyenne qui en réſulte, paſſeroit par le centre d'inertie du corps, comme je l'ai fait voir dans un Mémoire précédent. Mais ſi un corps celeſte n'eſt pas ſphérique, ou que ſes momens d'inertie par rapport à ſes trois axes principaux ne ſont pas égaux, & qu'il ait commencé à tourner autour d'un axe différent de ſes axes principaux, alors quand même il n'y auroit point de forces ſollicitantes, ſon mouvement de rotation ſeroit troublé, & l'axe de rotation changeroit de direction: comme j'ai demontré dans un autre Mémoire, qui précéde celui-ci.

2. De là il s'enſuit, que ſi le mouvement de rotation d'un corps celeſte n'eſt pas uniforme, ou que l'axe de rotation ne ſe trouve pas toujours dirigé vers les mêmes points du ciel, ce corps n'a pas certainement cette propriété, que ſes momens d'inertie par rapport à ſes axes principaux ſoient égaux entr'eux, mais qu'il y aura une inéga-

lité entre ſes momens d'inertie principaux. Donc, puisque l'axe de la terre n'eſt pas toujours dirigé vers les mêmes points du ciel, quoique le mouvement diurne paroiſſe uniforme, nous en devons conclure que les momens d'inertie de la terre ne ſont pas égaux entr'eux. Une ſemblable inégalité doit avoir lieu dans la lune, puiſque ſon mouvement de rotation n'eſt pas uniforme, & qu'on y obſerve outre cela un changement dans la poſition de ſon axe de rotation.

3. Quand il s'agit du mouvement de la terre, il faut obſerver que l'axe de la terre eſt différent de l'axe de rotation; car, puiſque l'axe de la terre ſe trouve dans un mouvement continuel à cauſe de ſa nutation & de la préceſſion des équinoxes, il ne convient jamais avec l'axe de rotation, qui à chaque inſtant eſt abſolument immobile, faiſant abſtraction du mouvement annuel. Pour mettre cette diſtinction dans tout ſon jour, conſidérons une ſphére décrite autour du centre de la terre, à la ſurface de laquelle ſoit maintenant le pole de la terre en A, qui avance pendant un petit tems dt en a, décrivant autour d'un point fixe P l'angle infiniment petit $APa = d\omega$, mais que la terre elle-même ſe tourne cependant autour du pole A par le petit angle $ZAz = d\Phi$. Cela poſé, il y aura dans l'arc PA un point O, qui par ce double mouvement demeurera en repos; car, en vertu du pole, il décrit l'arc $O\omega = d\omega \sin PO$, & à cauſe du mouvement diurne, l'arc $Oo = d\Phi \sin AO$. Poſons donc ces deux arcs égaux

Fig. 1.

entr'eux, & nous trouverons: $\tang AO = \frac{d\omega \sin AP}{d\Phi + d\omega \cos AP}$,

& O ſera le point de la terre qui pour cet inſtant demeure en repos.

4. Ce n'eſt donc pas le pole de la terre A, mais un autre point O qui eſt immobile pendant un inſtant, & partant la ligne droite tirée du centre de la terre de ce point O ſera l'axe de rotation, & non pas l'axe de la terre, qui paſſe par le point A. Il eſt bien vrai que la différence, ou l'arc AO, eſt ſi petit, qu'il ne ſauroit entrer en aucune conſidération, puiſque le rapport de $d\omega$ à $d\Phi$ eſt comme

50″

$50''$ à $365\frac{1}{4}.\ 360^{\circ}$, ou $\frac{d\omega}{d\Phi} = \frac{1}{25920.\ 365\frac{1}{4}}$, & à cauſe de

ſin AP $=$ $\frac{2}{5}$ environ, tang AO $= \frac{1}{64800.\ 365\frac{1}{4}}$, de ſorte que

l'intervalle AO n'eſt que la $\frac{1}{115}$ partie d'une ſeconde, ou une demi-tierce à peu près. Mais, ſi le mouvement du pole étoit plus rapide par rapport au mouvement diurne, ce qui pourroit bien arriver dans les autres planetes, il faudroit ſoigneuſement diſtinguer l'axe de rotation de la terre ou planete. Car l'axe de la terre eſt une ligne fixe dans le corps de la terre, mais mobile à l'égard du ciel: or l'axe de rotation n'eſt pas une ligne fixe dans la terre, mais quand la ligne tirée du centre de la terre par le point O eſt à préſent l'axe de rotation, après le tems dt, la ligne tirée au point ω ſera l'axe de rotation, de ſorte que l'axe de rotation change continuellement tant à l'égard de la terre qu'à égard du ciel.

5. Voilà donc une double maniere de repréſenter le mouvement diurne de la terre. L'une eſt celle, dont on ſe ſert dans l'Aſtronomie, où l'on conçoit une ligne fixe dans la terre, qu'on nomme ſon axe, autour duquel on dit que la terre tourne, pendant que cette ligne elle-même a un mouvement autour des poles de l'écliptique, qu'on regarde comme des points fixes dans le ciel. L'autre maniere eſt la plus propre pour la Mécanique, où l'on marque pour chaque tems les points au ciel, autour deſquels la terre tourne alors: cette maniere eſt l'unique dans ſon eſpece, & parfaitement déterminée par le mouvement de la terre, au lieu que ſelon la premiere le même mouvement pourroit être repréſenté d'une infinité de manieres différentes. Car, au lieu de l'axe, on pourroit conſidérer une autre ligne fixe quelconque dans la terre, & aſſigner ſon mouvement dans le ciel, enſuite il faudroit définir le mouvement dont la terre tourneroit cependant autour de cette ligne. Mais il faut avouer que la maniere dont on ſe ſert actuellement, eſt la plus ſimple dans ſon eſpece, & nous repréſente le plus intelligiblement le mouvement de la terre: elle ſemble

Mm 2 même

même plus claire, que l'autre qui eſt fondée ſur l'axe de rotation: quoique je ſois obligé de ſuivre celle-ci dans les recherches préſentes.

6. Avant que d'examiner, combien le mouvement de rotation d'un corps celeſte eſt troublé par les forces dont il eſt ſollicité vers les autres corps celeſtes, il ſera bon d'expliquer, quel devroit être leur mouvement de rotation, s'ils n'étoient pas aſſujettis à de telles forces. Je paſſe donc le cas, où tous les momens d'inertie d'un corps celeſte ſont égaux entr'eux, puisqu'alors non ſeulement le mouvement de rotation ſeroit uniforme & l'axe de rotation immobile, mais que les forces ſollicitantes elles-mêmes n'y ſauroient rien déranger. J'enviſage le corps celeſte, dont il s'agit de déterminer le mouvement de rotation, comme ayant ſes momens d'inertie par rapport à ſes trois axes principaux, inégaux entr'eux; & d'abord je remarque, que ſi ce corps avoit reçu une fois un mouvement de rotation autour de quelqu'un de ſes axes principaux, cet axe demeureroit dirigé conſtamment vers les mêmes points du ciel, & la viteſſe angulaire demeureroit toujours la même. Il y a grande apparence, que ſi la terre n'étoit point aſſujettie aux forces du ſoleil & de la lune, ſon axe de rotation demeureroit immobile, d'où il faut conclure, que la ligne droite que nous nommons ſon axe, eſt un de ſes trois axes principaux.

7. Cette obſervation me conduit à une réflexion, qui ne paroit pas peu importante. Puisque le centre d'inertie de la terre eſt ſitué dans ſon axe, il n'eſt pas encore décidé, s'il ſe trouve au milieu de l'axe, où s'il eſt plus proche de l'un, ou de l'autre pole: ou plutôt s'il tombe dans le plan de l'équateur, ou de quelqu'autre cercle parallele. On comprend aiſément que les phénomenes communs ne ſauroient rien décider la deſſus, mais peut-être quelques effets de l'action de la lune nous pourront donner quelques éclairciſſemens. M. Meyer, cet habile Aſtronome de Gœttingue, à qui l'Aſtronomie eſt redevable de tant d'importantes découvertes, croit avoir de fortes raiſons de ſoutenir, que le centre d'inertie de la terre ne ſe trouve pas au milieu de l'axe, ou dans le plan de l'équateur, mais dans un certain cercle parallele,

lele, dont la détermination mérite ſans doute tous les ſoins poſſibles des Aſtronomes. C'eſt dans ce cercle parallele que doivent exiſter les deux autres axes principaux de la terre.

8. Mais, ſi la terre n'avoit pas reçu un mouvement de rotation autour de quelqu'un de ſes trois axes principaux, le phénomene de ſon mouvement diurne ne ſeroit plus ſi ſimple, & demanderoit bien de l'adreſſe, pour le repréſenter juſtement; quand même il n'y auroit point de forces qui le troublaſſent. Quoique ce cas n'ait pas lieu dans la terre, il pourroit bien exiſter dans quelqu'autre planete, & mérite par cette raiſon d'être développé plus ſoigneuſement: peut-être que c'eſt de là que les irrégularités qu'on remarque dans le mouvement de rotation de Venus, tirent leur origine: & partant il ſera bon d'en traiter plus particulierement, tout comme s'il avoit lieu dans la terre. Dans ce cas, il ne ſeroit point queſtion de l'axe de la terrre; on verroit bien dans le ciel des points immobiles pour quelque tems, autour deſquels le ciel ſembleroit tourner, mais ces points changeroient continuellement de place, & il pourroit arriver que le mouvement de rotation ne fût pas même uniforme. Ces irrégularités embarraſſeroient ſans doute beaucoup les Aſtronomes.

9. Remontons au commencement, ou à une époque fixe, & Fig. 1.
que les trois axes principaux de la terre ayent été alors dirigés vers les points du ciel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Suppoſons de plus que la terre ait eu alors un mouvement de rotation autour du point $\mathfrak{D}$ dans le ſens $\mathfrak{ABC}$ avec une viteſſe angulaire $= \mathfrak{e}$. Du point $\mathfrak{D}$ qu'on conçoive tiré aux points $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, des arcs de grands cercles, & nommons ces arcs $\mathfrak{DA} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{DB} = \mathfrak{b}$, & $\mathfrak{DC} = \mathfrak{c}$: Or, pour la conſtitution de la terre elle-même, ſoient ſes momens d'inertie par rapport à l'axe $\mathfrak{A} = Maa$, à l'axe $\mathfrak{B} = Mbb$, & à l'axe $\mathfrak{C} = Mcc$, que je ſuppoſe connus. Maintenant, pour repréſenter le plus ſimplement qu'il ſoit poſſible le mouvement de rotation, dont la terre ſera portée dans la ſuite, il faut le rapporter toujours à un cer-

tain point fixe du ciel, duquel tirant aux points $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, des arcs de grands cercles il soit:

$$\cos\mathfrak{A}P = \frac{\mathfrak{e}\,aa\cos\mathfrak{a}}{\sqrt{G}};\ \cos\mathfrak{B}P = \frac{\mathfrak{e}\,bb\cos\mathfrak{b}}{\sqrt{G}};\ \cos\mathfrak{C}P = \frac{\mathfrak{e}\,cc\cos\mathfrak{c}}{\sqrt{G}},$$

posant $\sqrt{G} = \mathfrak{e}\sqrt{(a^4\cos\mathfrak{a}^2 + b^4\cos\mathfrak{b}^2 + c^4\cos\mathfrak{c}^2)}$.

10. Pour connoitre mieux ce point important du ciel P, sachant la position des axes principaux $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, à cet instant, qu'on regarde principalement à l'axe $\mathfrak{A}$, & on aura

$$\cos\mathfrak{B}\mathfrak{A}P = \frac{bb\cos\mathfrak{b}}{\sqrt{(b^4\cos\mathfrak{b}^2 + c^4\cos\mathfrak{c}^2)}}, \quad \&$$

$$\sin\mathfrak{B}\mathfrak{A}P = \frac{-cc\cos\mathfrak{c}}{\sqrt{(b^4\cos\mathfrak{b}^2 + c^4\cos\mathfrak{c}^2)}},$$

de sorte que $\tang\mathfrak{B}\mathfrak{A}P = \frac{-cc\cos\mathfrak{c}}{bb\cos\mathfrak{b}}$ ayant

$$\cos\mathfrak{A}P = \frac{aa\cos\mathfrak{a}}{\sqrt{(a^4\cos\mathfrak{a}^2 + b^4\cos\mathfrak{b}^2 + c^4\cos\mathfrak{c}^2)}},$$

d'où la position du point P est déterminée le plus commodement. Ici il faut remarquer que, si les momens principaux de la terre étoient égaux entr'eux, ou $aa = bb = cc$, à cause de $\sqrt{G} = \mathfrak{e}\,aa$, puisque $\cos\mathfrak{a}^2 + \cos\mathfrak{b}^2 + \cos\mathfrak{c}^2 = 1$, on auroit

$$\cos\mathfrak{A}P = \cos\mathfrak{a},\quad \cos\mathfrak{B}P = \cos\mathfrak{b},\quad \&\ \cos\mathfrak{C}P = \cos\mathfrak{c},$$

& partant le point P tomberoit dans le point $\mathfrak{O}$. Donc, si les momens d'inertie de la terre sont à peu près égaux, on conçoit que le point P ne sera pas fort éloigné du point $\mathfrak{O}$; c'est pourquoi il faut concevoir le point P placé au dedans du triangle $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, dans lequel se trouve le point $\mathfrak{O}$. Car, puisque les axes principaux passent en deux points opposés par la sphere, on peut toujours former un triangle $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, dans lequel soit le point $\mathfrak{O}$.

11.

11. Introduisons ce point P dans le calcul, & posons pour le commencement, ou notre époque, les arcs

$$P\mathfrak{A} = \mathfrak{l}, \quad P\mathfrak{B} = \mathfrak{m}, \quad \& \ B\mathfrak{C} = \mathfrak{n},$$

& soit $\mathfrak{G} = a^4 \cos\mathfrak{a}^2 + b^4 \cos\mathfrak{b}^2 + c^4 \cos\mathfrak{c}^2$, de sorte que $\sqrt{G} = e\sqrt{\mathfrak{G}}$, &

$$\cos\mathfrak{l} = \frac{aa\cos\mathfrak{a}}{\sqrt{\mathfrak{G}}}; \quad \cos\mathfrak{m} = \frac{bb\cos\mathfrak{b}}{\sqrt{\mathfrak{G}}}; \quad \cos\mathfrak{n} = \frac{cc\cos\mathfrak{c}}{\sqrt{\mathfrak{G}}},$$

& $\mathfrak{G}\left(\frac{\cos\mathfrak{l}^2}{a^4} + \frac{\cos\mathfrak{m}^2}{b^4} + \frac{\cos\mathfrak{n}^2}{c^4}\right) = 1$; par conséquent pour le pole de rotation $\mathfrak{O}$ au même tems:

$$\cos\mathfrak{a} = \frac{\sqrt{\mathfrak{G}}}{aa}\cos\mathfrak{l}; \quad \cos\mathfrak{b} = \frac{\sqrt{\mathfrak{G}}}{bb}\cos\mathfrak{m}; \quad \cos\mathfrak{c} = \frac{\sqrt{\mathfrak{G}}}{cc}\cos\mathfrak{n},$$

& pour l'angle $P\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, si l'on en veut faire usage:

$$\cos P\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{\cos\mathfrak{m}}{\sin\mathfrak{l}}, \quad \& \ \sin P\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -\frac{\cos n}{\sin\mathfrak{l}}.$$

de sorte que posant cet angle $P\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{r}$ on ait $\operatorname{tang}\mathfrak{r} = -\frac{\cos\mathfrak{n}}{\cos\mathfrak{m}}$.

Ces quantités regardent l'état initial, ou l'époque fixe, & dépendent de la position de l'axe de rotation $\mathfrak{O}$ par rapport aux axes principaux du corps. Ensuite je suppose que le corps ait tourné alors dans le sens $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ avec la vitesse angulaire $= \mathfrak{e}$, où $\mathfrak{e}$ marque l'angle décrit dans une seconde.

12. Ayant établi ces élémens, on demande quel sera l'état & le mouvement du corps après un tems quelconque, que je pose $= t$ secondes. Que les axes principaux soient parvenus alors en A, B, C, & que le corps tourne présentement autour de l'axe de rotation O dans le sens ABC avec la vitesse angulaire $= \varepsilon$. Pour cet effet posons

poſons pour abréger $\frac{bb-cc}{aa}=\mathrm{A}$; $\frac{cc-aa}{bb}=\mathrm{B}$; $\frac{aa-bb}{cc}=\mathrm{C}$, comme dans le Mémoire précédent, où j'ai donné la ſolution de cette queſtion. Et au lieu de la lettre u j'écris ici $\mathrm{G}v$, & d'abord il faut conſtruire cette équation différentielle:

$$\mathfrak{e}\,dt\sqrt{\mathfrak{G}}=\frac{aa\,bb\,cc\,dv}{\sqrt{(\cos\mathfrak{l}^2+2\mathrm{A}a^4v)(\cos\mathfrak{m}^2+2\mathrm{B}b^4v)(\cos\mathfrak{n}^2+2\mathrm{C}c^4v)}},$$

de ſorte qui pour chaque tems propoſé on puiſſe aſſigner la quantité v qui évanouiſſe au commencement, où $t=0$. Il eſt à remarquer, que des lettres A, B, C, il y en a néceſſairement une au moins négative; & partant cette conſtruction peut être tirée du mouvement d'un pendule, qui ſe meut dans un cercle. Ou du moins, pour chaque cas il ne ſera pas difficile de dreſſer des tables, qui marquent pour chaque tems la valeur de v.

13. Alors, poſant l'angle $\mathfrak{A}\mathrm{P}\mathrm{A}=\lambda$, qui marque combien l'axe principal A eſt avancé, depuis le commencement, en ſens contraire au mouvement de rotation, on aura

$$d\lambda=\mathfrak{e}\,dt\sqrt{\mathfrak{G}}.\,\frac{bb\cos\mathfrak{n}^2+cc\cos\mathfrak{m}^2-2\mathrm{A}aa\,bb\,cc\,v}{bb\,cc\,(\sin\mathfrak{l}^2-2\mathrm{A}a^4v)},$$

de ſorte que la viteſſe angulaire, dont le point A avance préſentement autour du point fixe P, ſoit:

$$\mathfrak{e}\sqrt{\mathfrak{G}}.\,\frac{bb\cos\mathfrak{n}^2+cc\cos\mathfrak{m}^2-2\mathrm{A}aa\,bb\,cc\,v}{bb\,cc\,(\sin\mathfrak{l}^2-2\mathrm{A}a^4v)},$$

cette viteſſe angulaire ayant été au commencement

$$=\mathfrak{e}\sqrt{\mathfrak{G}}.\,\frac{bb\cos\mathfrak{n}^2+cc\cos\mathfrak{m}^2}{bb\,cc\sin\mathfrak{l}^2}.$$

De la même maniere, on pourra aſſigner de combien les deux autres axes principaux B & C ſeront avancés autour du point fixe P depuis

puis leur position initielle 𝔅 & ℭ. Or alors on aura pour les arcs PA, PB, PC

$$\cos PA = \sqrt{(\cos \mathfrak{l}^2 + 2 A a^4 v)}; \quad \cos PB = \sqrt{(\cos \mathfrak{m}^2 + 2 B b^4 v)};$$
$$\cos PC = \sqrt{(\cos \mathfrak{n}^2 + 2 C c^4 v)},$$

$$\sin PA = \sqrt{(\sin \mathfrak{l}^2 - 2 A a^4 v)}; \quad \sin PB = \sqrt{(\sin \mathfrak{m}^2 - 2 B b^4 v)};$$
$$\sin PC = \sqrt{(\sin \mathfrak{n}^2 - 2 C c^4 v)},$$

d'où la véritable position des trois axes principaux A, B, C, sera connue.

14. Mais, ayant trouvé celle d'un seul axe A, les deux autres seront plus aisément déterminés par l'angle PAB, pour lequel nous avons:

$$\cos PAB = \sqrt{\frac{\cos \mathfrak{m}^2 + 2 B b^4 v}{\sin \mathfrak{l}^2 - 2 A a^4 v}}, \quad \&$$

$$\sin PAB = -\sqrt{\frac{\cos \mathfrak{m}^2 + 2 C c^4 v}{\sin \mathfrak{l}^2 - 2 A a^4 v}}.$$

Cet angle étant donc variable, son incrément pour l'élément du tems dt se trouve

$$\frac{d.PAB}{dt} = \frac{-e\sqrt{\mathfrak{G}}}{aabbcc} \cdot \frac{(Cc^4 \cos \mathfrak{m}^2 - Bb^4 \cos n^2)\sqrt{(\cos \mathfrak{l}^2 + 2 A a^4 v)}}{\sin \mathfrak{l}^2 - 2 A a^4 v},$$

ce qui est la vitesse angulaire dont l'angle PAB diminue, de sorte qu'au commencement, la vitesse angulaire, dont l'angle P𝔄𝔅 a diminué, fût $= \frac{e\sqrt{\mathfrak{G}}}{aabbcc} \cdot \frac{(C c^4 \cos \mathfrak{m}^2 - B b^4 \cos \mathfrak{n}^2) \cos \mathfrak{l}}{\sin \mathfrak{l}^2}$.

Il faut ici remarquer, qu'à cause des valeurs supposées des lettres A, B, C, il y a tant $A a^2 + B b^2 + C c^2 = 0$, que $A a^4 + B b^4 + C c^4 = 0$.

15. Cela pourroit suffire pour la connoissance du mouvement, ayant déterminé l'angle 𝔄PA, l'arc PA, & l'angle PAB,

 d'où

d'où l'on connoit pour chaque tems proposé la position du corps à l'égard du ciel, & partant réciproquement, la position apparente du ciel. Mais on peut outre cela remarquer, que le corps tournera alors avec la vitesse angulaire $\mathfrak{s} = \mathfrak{e}\sqrt{(1 + 2(A + B + C)\mathfrak{G}v)}$ dans le sens ABC autour de l'axe de rotation, dont la position est telle que

$$\cos AO = \frac{\sqrt{\mathfrak{G}(\cos \mathfrak{l}^2 + 2Aa^4 v)}}{aa\sqrt{(1+2(A+B+C)\mathfrak{G}v)}} = \frac{\sqrt{(\cos \mathfrak{a}^2 + 2A\mathfrak{G}v)}}{\sqrt{(1-2ABC\mathfrak{G}v)}}$$

$$\cos BO = \frac{\sqrt{\mathfrak{G}(\cos \mathfrak{m}^2 + 2Bb^4 v)}}{bb\sqrt{(1+2(A+B+C)\mathfrak{G}v)}} = \frac{\sqrt{(\cos \mathfrak{b}^2 + 2B\mathfrak{G}v)}}{\sqrt{(1-2ABC\mathfrak{G}v)}}$$

$$\cos CO = \frac{\sqrt{\mathfrak{G}(\cos \mathfrak{n}^2 + 2Cc^4 v)}}{cc\sqrt{(1+2(A+B+C)\mathfrak{G}v)}} = \frac{\sqrt{(\cos \mathfrak{c}^2 + 2C\mathfrak{G}v)}}{\sqrt{(1-2ABC\mathfrak{G}v)}}$$

& O sera le point du ciel qui paroitra pour cet instant demeureren repos.

16. Cette représentation du mouvement devient beaucoup plus simple, si les momens d'inertie du corps par rapport aux deux axes B & C sont égaux entr'eux ou $cc = bb$; car, puisque alors $A = 0$, $B = -C = 1 - \frac{aa}{bb}$, &

$$\mathfrak{G} = a^4 \cos \mathfrak{a}^2 + b^4(\cos \mathfrak{b}^2 + \cos \mathfrak{c}^2) = a^4 \cos \mathfrak{a}^2 + b^4 \sin \mathfrak{a}^2,$$

ou $\mathfrak{G}\left(\frac{\cos \mathfrak{l}^2}{a^4} + \frac{\sin \mathfrak{l}^2}{b^4}\right) = 1$, l'arc $P\mathfrak{A} = \mathfrak{C}$ demeure toujours de la même quantité, ou $PA = P\mathfrak{A}$ tourne autour du point P uniformement avec la vitesse angulaire $= \frac{\mathfrak{e}\sqrt{\mathfrak{G}}}{bb}$: dans le sens $\mathfrak{A}$A. Outre cela, la vitesse dont l'arc AB tourne cependant autour du point A, par laquelle l'angle PAB va en diminuant, est aussi constante $= \frac{\mathfrak{e}\sqrt{\mathfrak{G}}}{aab^4}. - Bb^4 \cos \mathfrak{l} = \left(\frac{aa}{bb} - 1\right). \frac{\mathfrak{e}\cos \mathfrak{l}}{aa}\sqrt{\mathfrak{G}}$.

Par conséquent la vitesse angulaire de l'arc $PA = \mathfrak{l}$ autour du point fixe

fixe P dans le ſens 𝔄A, eſt à la viteſſe angulaire dont le corps tourne cependant autour du point A en ſens contraire BP, comme 1 à $\left(1 - \frac{bb}{aa}\right)$ coſ I. Voilà donc ce mouvement repréſenté de la même maniere que l'on eſt accoutumé d'enviſager le mouvement de la terre, entant que l'axe de la terre eſt mobile autour des poles de l'écliptique.

17. Un tel mouvement pourra être repréſenté par le moyen d'une Machine de la maniere ſuivante. Soit PQRS un cercle librement mobile autour des tourillons P & R diamétralement oppoſés: & que dans ce cercle, en A & D, ſoit enchaſſé l'axe AD d'un corps *asdq*, autour duquel le corps puiſſe tourner librement, pendant que le cercle lui même tourne autour des tourillons P & R. Maintenant pour repréſenter le mouvement du §. précédent l'un & l'autre mouvement de rotation doit être uniforme, mais en ſorte que l'un ſoit dirigé en ſens contraire à l'égard de l'autre: ſuppoſant $aa > bb$, & que la viteſſe angulaire du cercle autour des tourillons P & R, ſoit à celle du corps autour de l'axe AD comme 1 à $\left(1 - \frac{bb}{aa}\right)$ coſin PA. D'où l'on voit que le mouvement du corps eſt beaucoup plus lent que celui de l'axe AD, & évanouiroit tout à fait au cas $aa = bb$. Or dans le cas au $aa < bb$ l'un & l'autre mouvement ſeroit dirigé en même ſens. Un tel mouvement ſe ſoutiendroit par ſoi-même, & n'auroit pas beſoin de forces étrangeres.

18. Par une ſemblable machine on pourroit auſſi repréſenter en général le mouvement déterminé ci-deſſus d'un corps dont tous les momens principaux d'inertie ſont inégaux entr'eux. Mais alors l'axe AD doit être enchaſſé en ſorte dans le cercle, que les points A & D puiſſent être plus ou moins éloignés des tourillons P & R: & outre cela ni l'un ni l'autre mouvement de rotation ne ſera pas uniforme, mais doit être reglé ſur les formules trouvées ci-deſſus. Pour

 cet

cet effet il faut avoir égard à la plus grande & à la plus petite valeur possible de la quantité v. Or, supposant $aa > bb$, & $bb > cc$, puisque ces trois formules doivent être réelles & ne pas surpasser l'unité,

$$\sqrt{(\cos \mathfrak{l}^2 + 2aa(bb - cc)v)}; \quad \sqrt{(\cos \mathfrak{m}^2 - 2bb(aa - cc)v)};$$
$$\sqrt{(\cos \mathfrak{n}^2 + 2cc(aa - bb)v)},$$

on voit que la plus grande valeur positive de $+ v$ est égale à la moindre de ces trois formules

$$\frac{\sin \mathfrak{l}^2}{2aa(bb - cc)}; \quad \frac{\cos \mathfrak{m}^2}{2bb(aa - cc)}; \quad \frac{\sin \mathfrak{n}^2}{2cc(aa - bb)},$$

& la plus grande négative valeur de $- v$ égale à la moindre de ces trois formules

$$\frac{\cos \mathfrak{l}^2}{2aa(bb - cc)}; \quad \frac{\sin \mathfrak{m}^2}{2bb(aa - cc)}; \quad \frac{\cos \mathfrak{n}^2}{2cc(aa - bb)}.$$

19. Il seroit donc possible que la terre eût un tel mouvement compliqué de rotation, sans qu'il en falût chercher la cause dans des forces étrangeres. Mais, quoique l'axe de la terre ait actuellement un mouvement autour des poles de l'écliptique, ce mouvement est bien différent de celui que je viens d'exposer. Car dans la terre le mouvement de l'axe est extrèmement lent à l'égard du mouvement autour de l'axe; au lieu que, dans le mouvement décrit, le mouvement de l'axe même est beaucoup plus rapide que celui du corps autour de l'axe. Cette remarque suffit pour nous assurer, que le mouvement de l'axe de la terre, ou sa nutation, avec la précession des équinoxes, est l'effet d'une cause étrangere, sans laquelle l'axe de la terre demeureroit absolument immobile, en faisant abstraction du mouvement annuel; d'où il est encore évident que la ligne que nous nommons l'axe de la terre, est certainement un de ses trois axes principaux. Mais peut-être, dans la planete de Vénus, la chose est tout à fait différente.

20. Voyons maintenant comment ce mouvement de rotation d'un corps celeſte ſera troublé par quelque force étrangere, qui vient de l'attraction d'un autre corps celeſte, que je nommerai un centre de force. Puisqu'il s'agit ici uniquement du mouvement de rotation, & que je ſuppoſe le centre d'inertie du corps propoſé en repos, le centre de force décrira autour de lui une certaine orbite, qui étant rapportée à une ſphére fixe décrite autour du centre d'inertie du corps, ſoit la ligne QFS dirigée ſuivant l'orde des ſignes celeſtes. Que le centre de force attire en raiſon réciproque du quarré des diſtances, & qu'à la diſtance $= e$, la force dont un corps y eſt pouſſé, ſoit préciſément égale au poids que ce même corps auroit étant placé ſur la terre. Or, puisque la gravité n'eſt pas partout la même, il faut pour cet effet choiſir un certain endroit, où l'on connoiſſe exactement la hauteur par laquelle un corps grave tombe dans une ſeconde. La lettre g marquera conſtamment cette hauteur. Fig. 4.

21. Le point P & le cercle PQR étant pris pour des termes fixes, qu'après un tems écoulé quelconque $= t$ ſecondes, le centre de force réponde au point F, & ſoit l'arc PF $= p$, & l'angle QPF $= q$: & que s exprime la diſtance du centre de forces au centre d'inertie du corps propoſé. Ces quantités p, q, s, pourront être conſidérées comme des fonctions du tems t. Qu'au même inſtant les axes principaux du corps répondent aux points A, B, C, par rapport auxquels les momens d'inertie du corps ſoient Maa, Mbb, Mcc, la maſſe étant $= M$, & ayant tiré de ces trois points des arcs de grands cercles, tant au point F qu'au point fixe P, ſoient ces arcs FA $= \zeta$, FB $= \eta$, FC $= \theta$, & PA $= l$, PB $= m$, PC $= n$. Soient de plus les angles QPA $= \lambda$, QPB $= \mu$, QPC $= \nu$, qu'il faut conſidérer comme négatifs à l'égard de ceux que j'ai introduits dans la ſolution générale, où je les avois pris du cercle oppoſé PSR. Enfin, que le corps tourne préſentement autour du point O, dans le ſens ABC, avec la viteſſe angulaire $= \varkappa$, & ſoient les arcs OA $= \alpha$, OB $= \beta$, OC $= \gamma$, & qu'on poſe $\varkappa \cos\alpha = x$, $\varkappa \cos\beta = y$, & $\varkappa \cos\gamma = z$.

Nn 3 22.

22. Maintenant la force attractrice du point F nous fournit les momens de forces suivans.

I. Le moment de force par rapport à l'axe IA dans le sens

$$BC = \frac{3Mee}{s^3}(cc - bb)\cos\eta \cos\theta = P.$$

II. Le moment de force par rapport à l'axe IB dans le sens

$$CA = \frac{3Mee}{s^3}(aa - cc)\cos\zeta \cos\theta = Q.$$

III. Le moment de force par rapport à l'axe IC dans le sens

$$AB = \frac{3Mee}{s^3}(bb - aa)\cos\zeta \cos\eta = R$$

Donc, si nous posons $\frac{bb - cc}{aa} = A$; $\frac{cc - aa}{bb} = B$; $\frac{aa - bb}{cc} = C$, nous aurons les équations différentielles suivantes:

$$\text{I.}\quad dx - Ayzdt + \frac{6Agee}{s^3}dt\cos\eta\cos\theta = 0.$$

$$\text{II.}\quad dy - Bxzdt + \frac{6Bgee}{s^3}dt\cos\zeta\cos\theta = 0.$$

$$\text{III.}\quad dz - Cxydt + \frac{6Cgee}{s^3}dt\cos\zeta\cos\eta = 0.$$

$$\text{IV.}\quad dl\sin l = dt(y\cos n - z\cos m).$$

$$\text{V.}\quad dm\sin m = dt(z\cos l - x\cos n).$$

$$\text{VI.}\quad dn\sin n = dt(x\cos m - y\cos l).$$

$$\text{VII.}\quad d\lambda\sin l^2 = dt(y\cos m + z\cos n).$$

$$\text{VIII.}\quad d\mu\sin m^2 = dt(z\cos n + x\cos l).$$

$$\text{IX.}\quad d\nu\sin n^2 = dt(x\cos l + y\cos m).$$

23. Pour les arcs ζ, η, θ, ils peuvent être exprimés par les autres quantités, dont les différentiels sont déterminés par ces équations: car les principes de la Trigonometrie sphérique fournissent:

$$\cos\zeta = \cos(\lambda - q)\sin l\sin p + \cos l\cos p$$
$$\cos\eta = \cos(\mu - q)\sin m\sin p + \cos m\cos p$$
$$\cos\vartheta = \cos(\nu - q)\sin n\sin p + \cos n\cos p$$

Mais on comprend aisément, que cette substitution ne méneroit pas à grande chose, & que la resolution générale des formules que nous venons de trouver, est trop difficile, pour que nous osions nous flatter d'y réussir. Le grand nombre des quantités variables qui y entrent, ne nous laisse entrevoir aucune route qu'il faudroit suivre. Par cette raison je me vois obligé de borner mes recherches à quelques cas particuliers, où je puisse espérer quelque succès. Au moins le cas de la terre n'est-il pas assujetti à des si grandes difficultés qu'on ne puisse les surmonter.

24. Pour faire l'application des formules trouvées au mouvement de la terre, je fais les suppositions suivantes:

I. Je suppose que l'axe de rotation O soit très proche de l'axe principal A, de sorte qu'on puisse regarder l'arc OA $= \alpha$ comme extrêmement petit.

II. Je suppose que les momens d'inertie par rapport aux deux autres axes principaux B & C sont égaux entr'eux, de sorte que $cc = bb$, & partant $\mathfrak{A} = 0$; & $\mathfrak{B} = 1 - \frac{aa}{bb}$, $\mathfrak{C} = \frac{aa}{bb} - 1$, donc $\mathfrak{C} = -\mathfrak{B}$.

Il semble certain, que ces deux suppositions ont lieu dans la terre: ayant remarqué, que si la terre n'étoit pas assujettie à l'action des forces de la lune & du soleil, elle tourneroit uniformement autour de son

axe,

axe, qui demeureroit fixe. Donc, actuellement l'axe de rotation O ne differe jamais ſenſiblement de l'axe principal A, qui eſt celui qu'on nomme par excellence l'axe de la terre. Or, que les momens d'inertie par rapport aux deux autres axes principaux ſont égaux entr'eux, cela paroit également certain, à cauſe de la rondeur de la terre autour de ſon axe A.

25. Puisqu'il convient de rapporter toût au pole A, poſons l'angle PAB $= r$, & nous aurons $\cos m = \sin l \cos r$, & $\cos n = - \sin l \sin r$. Enſuite, puisque l'arc AO $= \alpha$, eſt quaſi infiniment petit, ayant tiré de O ſur les arcs AB & AC les perpendiculaires Ob, Oc, poſons l'angle OAb $= \varrho$, & nous aurons A$b = \alpha \cos \varrho$, A$c = \alpha \sin \varrho$, donc BO $= \beta = 90° - \alpha \cos \varrho$, & CO $= \gamma = 90° - \alpha \sin \varrho$. De là nous tirons $x = 8$, $y = \alpha 8 \cos \varrho$, & $z = \alpha 8 \sin \varrho$, négligeant les termes où α auroit plus d'une dimenſion. Maintenant les équations N°. IV. V. VI. donneront

IV. $dl \sin l = - \alpha 8 dt \sin l \sin (r + \varrho)$, ou $dl = - \alpha 8 dt \sin (r + \varrho)$,

V. $- dl \cos l \cos r + dr \sin l \sin r = 8 dt (\alpha \cos l \sin \varrho + \sin l \sin r)$,

VI. $dl \cos l \sin r + dr \sin l \cos r = 8 dt (\sin l \cos r - \alpha \cos l \cos \varrho)$,

d'où la combinaiſon V. $\sin r$ + VI. $\cos r$ fournit

$$dr \sin l = 8 dt (\sin l - \alpha \cos l \cos (r + \varrho))$$

ou bien $dr = 8 dt - \dfrac{\alpha 8 dt \cos (r + \varrho)}{\tang l}$,

Et partant nous aurons aſſez exactement $dr = 8 dt$.

26. Des trois dernieres équations il ſuffit de prendre la

VII. $d\lambda \sin l^2 = \alpha 8 dt \sin l \cos (r + \varrho)$, ou

$$d\lambda = \frac{\alpha 8 dt \cos (r + \varrho)}{\sin l},$$

car

car les angles μ & ν dépendent en ſorte de λ;

$$\cos(\lambda-\mu)=-\frac{\cos l\cos m}{\sin l\sin m};\quad \cos(\lambda-\nu)=-\frac{\cos l\cos n}{\sin l\sin n},$$

$$\sin(\lambda-\mu)=-\frac{\cos n}{\sin l\sin m};\quad \sin(\lambda-\nu)=-\frac{\cos m}{\sin l\sin n}.$$

De là, puiſque $\mu-q=(\lambda-q)-(\lambda-\mu)$, & $\nu-q=(\lambda-q)-(\lambda-\nu)$, nous tirons:

$$\cos(\mu-q)=-\frac{\cos l\cos m\cos(\lambda-q)-\cos n\sin(\lambda-q)}{\sin l\sin m}=$$

$$-\frac{\cos l\cos r\cos(\lambda-q)+\sin r\sin(\lambda-q)}{\sin m}$$

$$\cos(\nu-q)=-\frac{\cos l\cos n\cos(\lambda-q)+\cos m\sin(\lambda-q)}{\sin l\sin n}=$$

$$+\frac{\cos l\sin r\cos(\lambda-q)+\cos r\sin(\lambda-q)}{\sin n}$$

& par conſéquent nous obtiendrons:

$$\cos\zeta=\sin l\sin p\cos(\lambda-q)+\cos l\cos p$$
$$\cos\eta=-\cos l\sin p\cos r\cos(\lambda-q)+\sin p\sin r\sin(\lambda-q)+\sin l\cos p\cos r$$
$$\cos\theta=+\cos l\sin p\sin r\cos(\lambda-q)+\sin p\cos r\sin(\lambda-q)-\sin l\cos p\sin r.$$

27. La premiere équation, à cauſe de $A=0$, donne dabord $dx=d\mathfrak{x}=0$, & partant la viteſſe angulaire ſera toujours la même, qui ſoit nommée $=\varepsilon$, de ſorte que $x=\mathfrak{x}=\varepsilon$, & partant $dl=-\varepsilon\alpha\,dt\sin(r+\varrho)$; $d\lambda=\frac{\varepsilon\alpha\,dt\cos(r+\varrho)}{\sin l}$;

$$\&\ dr=\varepsilon dt-\frac{\varepsilon\alpha\,dt\cos(r+\varrho)}{\operatorname{tang} l}.$$

Enfin, puisque $y = \varepsilon\alpha \cos\varrho$, & $z = \varepsilon\alpha \sin\varrho$, les équations N°. II. & III. deviendront:

$$\text{II. } \varepsilon d\alpha \cos\varrho - \varepsilon\alpha d\varrho \sin\varrho - B\varepsilon\varepsilon\alpha dt \sin\varrho + \frac{6Bgee}{s^3} dt \cos\zeta \cos\theta = 0,$$

$$\text{III. } \varepsilon d\alpha \sin\varrho + \varepsilon\alpha d\varrho \cos\varrho + B\varepsilon\varepsilon\alpha dt \cos\varrho - \frac{6Bgee}{s^3} dt \cos\zeta \cos\eta = 0,$$

pour la résolution desquelles il est bon de remarquer, que

$$\sin r \cos\eta + \cos r \cos\theta = \sin p \sin(\lambda - q)$$

$$\sin r \cos\theta - \cos r \cos\eta = \cos l \sin p \cos(\lambda - q) - \sin l \cos p.$$

d'où nous tirons ces deux autres équations

$$\varepsilon d\alpha \cos(r + \varrho) - \varepsilon\alpha d\varrho \sin(r + \varrho) - B\varepsilon\varepsilon\alpha dt \sin(r + \varrho)$$
$$+ \frac{6Bgee}{s^3} dt \cos\zeta \sin p \sin(\lambda - q) = 0.$$

$$\varepsilon d\alpha \sin(r + \varrho) + \varepsilon\alpha d\varrho \cos(r + \varrho) + B\varepsilon\varepsilon\alpha dt \cos(r + \varrho)$$
$$+ \frac{6Bgee}{s^3} dt \cos\zeta (\cos l \sin p \cos(\lambda - q) - \sin l \cos p = 0,$$

28. Posons l'angle PAO $= r + \varrho = \omega$, & $\lambda - q = \phi$, pour avoir

$$dl = -\varepsilon\alpha dt \sin\omega; \quad d\lambda = \frac{\varepsilon\alpha dt \cos\omega}{\sin l}; \quad d\phi = \frac{\varepsilon\alpha dt \cos\omega}{\sin l} - dq,$$

$$dr = \varepsilon dt - \frac{\varepsilon\alpha dt \cos\omega}{\tang l}, \quad \& \quad d\varrho = d\omega - \varepsilon dt + \frac{\varepsilon\alpha dt \cos\omega}{\tang l},$$

&

& nos équations à résoudre seront:

$$\varepsilon\, d\alpha \cos\omega - \varepsilon\,\alpha\, d\omega \sin\omega + (1 - B)\,\varepsilon\,\varepsilon\,\alpha\, dt \sin\omega$$
$$+ \frac{6Bgee}{s^3}\, dt \sin p \sin\Phi\, (\sin l \sin p \cos\Phi + \cos l \cos p) = 0,$$

$$\varepsilon\, d\alpha \sin\omega + \varepsilon\,\alpha\, d\omega \cos\omega - (1 - B)\,\varepsilon\,\varepsilon\,\alpha\, dt \cos\omega$$
$$+ \frac{6Bgee}{s^3}\, dt (\sin l \sin p \cos\Phi + \cos l \cos p)(\cos l \sin p \cos\Phi - \sin l \cos p) = 0.$$

Soit enfin $\alpha \cos\omega = u$, & $\alpha \sin\omega = v$, de sorte que $dl = -\varepsilon v\, dt$; & $d\Phi = \frac{\varepsilon u\, dt}{\sin l} - dq$, & qu'on ait à résoudre ces équations,

$$\varepsilon du + (1 - B)\varepsilon\varepsilon u dt + \frac{6Bgee}{s^3} dt \sin p \sin\Phi (\sin l \sin p \cos\Phi + \cos l \cos p) = 0,$$

$$\varepsilon dv - (1 - B)\varepsilon\varepsilon u dt + \frac{6Bgee}{s^3} dt (\sin l \sin p \cos\Phi + \cos l \cos p)(\cos l \sin p \cos\Phi - \sin l \cos p) = 0,$$

où il faut remarquer que $1 - B = \frac{aa}{bb}$.

29. Puisque les quantités u & v sont quasi infiniment petites, on pourra regarder l'arc l comme constant dans ces équations, & supposer $d\Phi = - dq$. Ensuite, il sera permis de regarder l'arc PF $= p$, comme constant ou peu variable, ce qui dépend du choix du point P; & la distance du centre de forces s ne change pas ordinairement tant, qu'on ne la pourroit regarder comme constante, du moins pour trouver des intégrales approchantes. Soit donc pour abréger:

$$\frac{6Bgee}{s^3} = N; \quad \frac{aa}{bb} = \kappa; \quad \& \ dq = \delta dt, \quad \text{ou} \ d\Phi = -\delta dt,$$

& il est évident qu'on pourra satisfaire à nos équations en posant:

$$u = P + Q\cos\phi + R\cos\phi^2, \quad \& \quad v = S\sin\phi + T\sin\phi\cos\phi,$$

de sorte que ces lettres P, Q, R, S, soient constantes. Or, ayant substitué ces valeurs on trouvera:

$$Q = \frac{N\sin p\cos p(\epsilon\kappa\cos 2l + \delta\cos l)}{\epsilon(\epsilon\epsilon\kappa\kappa - \delta\delta)}; \quad S = -\frac{N\sin p\cos p(\epsilon\kappa\cos l + \delta\cos 2l)}{\epsilon(\epsilon\epsilon\kappa\kappa - \delta\delta)}$$

$$R = \frac{N\sin l\sin p^2(\epsilon\kappa\cos l + 2\delta)}{\epsilon(\epsilon\epsilon\kappa\kappa - 4\delta\delta)}; \quad T = -\frac{N\sin l\sin p^2(\epsilon\kappa + 2\delta\cos l)}{\epsilon(\epsilon\epsilon\kappa\kappa - 4\delta\delta)}$$

$$P = -\frac{\delta N\sin l\sin p^2(\epsilon\kappa + 2\delta\cos l)}{\epsilon\epsilon\kappa(\epsilon\epsilon\kappa\kappa - 4\delta\delta)} - \frac{N\sin l\cos l\cos p^2}{\epsilon\epsilon\kappa}$$

$$\& \ P + \tfrac{1}{2}R = \frac{N\sin l\cos l(\sin p^2 - 2\cos p^2)}{2\epsilon\epsilon\kappa}.$$

30. On donnera ici aux quantités l, p, N, & δ, leurs valeurs moyennes, pour avoir des valeurs constantes des lettres P, Q, R, S, T, & alors à cause de $dt = -\frac{d\phi}{\delta}$, on aura

$$dl = \frac{\epsilon v d\phi}{\delta}, \quad \& \quad d\phi = -\frac{\epsilon u d\phi}{\delta\sin l} - dq,$$

d'où l'on tire par intégration, prenant I pour la valeur moyenne de l:

$$l = I - \frac{\epsilon S}{\delta}\cos\phi - \frac{\epsilon}{4\delta}T\cos 2\phi, \quad \&$$

$$\lambda = \text{Const.} - \frac{\epsilon P\phi}{\delta\sin l} - \frac{\epsilon Q\sin\phi}{\delta\sin l} - \frac{\epsilon R\phi}{2\delta\sin l} - \frac{\epsilon R\sin 2\phi}{4\delta\sin l}.$$

Or, outre cela, on aura $\phi = \lambda - q$, & ensuite

$$a = \sqrt{(uu + vv)}, \quad \& \quad \tan\omega = \frac{v}{u}.$$

Mais

Mais, puisque $dr = \epsilon dt - \frac{\epsilon u dt}{\text{tang}\, l} = \epsilon dt - d\lambda \cos l$, il s'enfuit $r = \epsilon t - \lambda \cos l$, & partant $\varrho = \omega - r$. On voit par là que si α a une fois été très petit, il demeurera toujours très petit, de sorte que notre calcul subsiste, à l'exception d'un seul cas marqué dans la suite.

31. Pour rendre le cas plus simple, puisqu'on ne sauroit presque point tenir compte de l'irrégularité du mouvement du centre de force F, supposons que ce point F se meut uniformement dans le cercle QFS, autour de la terre, à la distance constante $= s$, & soit P le pole de son orbite, de sorte que l'arc PF $= p = 90°$, & posant $dq = \delta dt$ que δ soit une quantité constante, marquant l'angle décrit dans une seconde par le point F. Puisque l'arc PA $= l$, ne change presque point, soit $\mathfrak{l}$ sa valeur moyenne, & nos équations à résoudre seront, posant $\frac{aa}{bb} = \kappa$

$$du + \epsilon \kappa v dt + \frac{3Bgee}{\epsilon s^3} dt \sin \mathfrak{l} \sin 2\Phi = 0,$$

$$dv - \epsilon \kappa u dt + \frac{3Bgee}{\epsilon s^3} dt \sin \mathfrak{l} \cos \mathfrak{l} (1 + \cos 2\Phi) = 0,$$

où $d\Phi = -\delta dt + \frac{\epsilon u dt}{\sin \mathfrak{l}}$. Mais, puisque u est extrèmement petit, & que nous négligeons les termes, où u & v monteroient à plus d'une dimension, on peut prendre $d\Phi = -\delta dt$, de sorte que $dt = -\frac{d\Phi}{\delta}$.

 32. Po-

32. Posons donc comme auparavant $\frac{6 B g e e}{s^3} = N$, pour avoir

$$du - \frac{\varepsilon \varkappa}{\delta}\, v d\Phi - \frac{N}{2\delta\varepsilon}\, d\Phi \sin I \sin 2\Phi = 0,$$

$$du + \frac{\varepsilon \varkappa}{\delta}\, v d\Phi - \frac{N}{2\delta\varepsilon}\, d\Phi \sin I \cos I (1 + \cos 2\Phi) = 0,$$

aûxquelles satisfont comme nous venons de voir ces valeurs particulieres:

$$u = P + \tfrac{1}{2} R + \tfrac{1}{2} R \cos 2\Phi; \quad v = \tfrac{1}{2} T \sin 2\Phi.$$

Mais, pour en trouver les intégrales en général, formons-en ces deux équations, qui soient intégrables.

$$\left.\begin{array}{l} + du \sin\frac{\varepsilon\varkappa}{\delta}\Phi + \frac{\varepsilon\varkappa}{\delta} u d\Phi \cos\frac{\varepsilon\varkappa}{\delta}\Phi - \frac{N}{2\delta\varepsilon} d\Phi \sin I \sin\frac{\varepsilon\varkappa}{\delta}\Phi \sin 2\Phi \\ + dv \cos\frac{\varepsilon\varkappa}{\delta}\Phi - \frac{\varepsilon\varkappa}{\delta} v d\Phi \sin\frac{\varepsilon\varkappa}{\delta}\Phi - \frac{N}{2\delta\varepsilon} d\Phi \sin I \cos I \cos\frac{\varepsilon\varkappa}{\delta}\Phi (1 + \cos 2\Phi) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} + du \cos\frac{\varepsilon\varkappa}{\delta}\Phi - \frac{\varepsilon\varkappa}{\delta} u d\Phi \sin\frac{\varepsilon\varkappa}{\delta}\Phi - \frac{N}{2\delta\varepsilon} d\Phi \sin I \cos\frac{\varepsilon\varkappa}{\delta}\Phi \sin 2\Phi \\ - dv \sin\frac{\varepsilon\varkappa}{\delta}\Phi - \frac{\varepsilon\varkappa}{\delta} u d\Phi \cos\frac{\varepsilon\varkappa}{\delta}\Phi + \frac{N}{2\delta\varepsilon} d\Phi \sin I \cos I \sin\frac{\varepsilon\varkappa}{\delta}\Phi (1 + \cos 2\Phi) \end{array}\right\} = 0.$$

33. Posons, pour abréger davantage, $\frac{\varepsilon \varkappa}{\delta} = \frac{\varepsilon a a}{\delta b b} = m$, & $\frac{N}{2\varepsilon\delta} = \frac{3 B g e e}{\delta \varepsilon s^3} = n$, & les intégrales seront:

$$u \sin m\Phi + v \cos m\Phi - n \sin I \int d\Phi \sin m\Phi \sin 2\Phi - n \sin I \cos I \int d\Phi \cos m\Phi . (1 + \cos 2\Phi) = E$$

$$u \cos m\Phi - v \sin m\Phi - n \sin I \int d\Phi \cos m\Phi \sin 2\Phi + n \sin I \cos I \int d\Phi \sin m\Phi . (1 + \cos 2\Phi) = F.$$

Or

Or $\sin m\phi . \sin 2\phi = \frac{1}{2}\cos(m-2)\phi - \frac{1}{2}\cos(m+2)\phi$
$\cos m\phi . \cos 2\phi = \frac{1}{2}\cos(m-2)\phi - \frac{1}{2}\cos(m+2)\phi$
$\cos m\phi . \sin 2\phi = -\frac{1}{2}\sin(m-2)\phi + \frac{1}{2}\sin(m+2)\phi$
$\sin m\phi . \cos 2\phi = +\frac{1}{2}\sin(m-2)\phi + \frac{1}{2}\sin(m+2)\phi$.

d'où l'on forme les intégrales.

$$u\sin m\phi + v\cos m\phi - \frac{n\sin l}{2}\left(\frac{\sin(m-2)\phi}{m-2} - \frac{\sin(m+2)\phi}{m+2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}n\sin l\cos l\left(\frac{2\sin m\phi}{m} + \frac{\sin(m-2)\phi}{m-2} + \frac{\sin(m+2)\phi}{m+2}\right) = \mathrm{E},$$

$$v\cos m\phi - v\sin m\phi - \frac{1}{2}n\sin l\left(\frac{\cos(m-2)\phi}{m-2} - \frac{\cos(m+2)\phi}{m+2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}n\sin l\cos l\left(\frac{2\cos m\phi}{m} + \frac{\cos(m-2)\phi}{m-2} + \frac{\cos(m+2)\phi}{m+2}\right) = \mathrm{F}.$$

Où il faut remarquer, qu'au cas $m = 2$, il y a $\frac{\sin(m-2)\phi}{m-2} = \phi$, & $\frac{\cos(m-2)\phi}{m-2} = \infty$, ou conſtant, & partant renfermé en F, de ſorte que ce terme puiſſe être omis.

34. Maintenant, en multipliant la premiere par ſin $m\phi$, & l'autre par coſ $m\phi$, leur ſomme donne:

$$u - \frac{1}{2}n\sin l\left(\frac{\cos 2\phi}{m-2} - \frac{\cos 2\phi}{m+2}\right) - \frac{1}{2}n\sin l\cos l\left(\frac{2}{m} + \frac{\cos 2\phi}{m-2} + \frac{\cos 2\phi}{m+2}\right) = \mathrm{E}\sin m\phi + \mathrm{F}\cos m\phi,$$

Enſuite, multipliant la premiere par coſ $m\phi$, & l'autre par $-$ ſin $m\phi$, on obtiendra

$$v + \frac{1}{2}n\sin l\left(\frac{\sin 2\phi}{m-2} + \frac{\sin 2\phi}{m+2}\right) + \frac{1}{2}n\sin l\cos l\left(\frac{\sin 2\phi}{m-2} - \frac{\sin 2\phi}{m+2}\right) = \mathrm{E}\cos m\phi - \mathrm{F}\sin m\phi,$$

Chan-

Changeons les constantes en posant $E = D\cos\xi$, & $F = D\sin\xi$, de sorte que ξ soit un angle constant: & nos équations se réduiront à celles-ci.

$$u - \frac{2n\sin l\cos 2\Phi}{mm-4} - \frac{n}{m}\sin l\cos l - \frac{mn\sin l\cos l\cos 2\Phi}{mm-4} = D\sin(m\Phi + \xi)$$

$$v + \frac{mn\sin l\sin 2\Phi}{mm-4} + \frac{2n\sin l\cos l\sin 2\Phi}{mm-4} = D\cos(m\Phi + \xi),$$

& partant on aura:

$$u = \frac{n}{m}\sin l\cos l + \frac{n\sin l\cos 2\Phi.(2 + m\cos l)}{mm-4} + D\sin(m\Phi + \xi)$$

$$v = -\frac{n\sin l\sin 2\Phi.(m + 2\cos l)}{mm-4} + D\cos(m\Phi + \xi).$$

35. Ces équations conviennent parfaitement avec celles que nous avons trouvées ci-dessus, si l'on met la constante $D = 0$, mais elles sont plus générales par cette même raison, qu'elles contiennent encore les deux constantes D & ξ. Cependant, le cas où $m = 2$, demande un dévelopement particulier, qu'il faut tirer des premieres intégrales, qui seront:

$$u\sin 2\Phi + v\cos 2\Phi - \tfrac{1}{2}n\sin l(\Phi - \tfrac{1}{4}\sin 4\Phi) - \tfrac{1}{2}n\sin l\cos l(\sin 2\Phi + \Phi + \tfrac{1}{4}\sin 4\Phi) = E$$

$$u\cos 2\Phi - v\sin 2\Phi + \tfrac{1}{8}n\sin l\cos 4\Phi - \tfrac{1}{2}n\sin l\cos l(\cos 2\Phi + \tfrac{1}{4}\cos 4\Phi) = G.$$

d'où l'on tire celles-ci:

$$u - \tfrac{1}{2}n\sin l.\Phi\sin 2\Phi + \tfrac{1}{8}n\sin l\cos 2\Phi - \tfrac{1}{2}n\sin l\cos l.\Phi\sin 2\Phi$$
$$- \tfrac{1}{2}n\sin l\cos l - \tfrac{1}{8}n\sin l\cos l\cos 2\Phi = E\sin 2\Phi + G\cos 2\Phi$$

$$v - \tfrac{1}{2}n\sin l.\Phi\cos 2\Phi + \tfrac{1}{8}n\sin l\sin 2\Phi - \tfrac{1}{2}n\sin l\cos l.\Phi\cos 2\Phi$$
$$- \tfrac{1}{8}n\sin l\cos l\sin 2\Phi = E\cos 2\Phi - G\sin 2\Phi,$$

& partant on aura:

$$u = \tfrac{1}{2}n\sin l\cos l + \tfrac{1}{2}n\sin l.(1 + \cos l)\Phi\sin 2\Phi + E\sin 2\Phi + (G - \tfrac{1}{8}n\sin l(1 - \cos l))\cos 2\Phi$$

$$v = \tfrac{1}{2}n\sin l(1 + \cos l)\Phi\cos 2\Phi + E\cos 2\Phi - (G + \tfrac{1}{8}n\sin l(1 - \cos l))\sin 2\Phi.$$

36.

36. Par rapport à ce cas $m = 2$ ou $\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{2bb}{aa}$ je remarque, que les deux quantités u & v pourroient croitre à l'infini puisqu'elles renferment des termes multipliées par l'arc Φ qui croit continuellement avec le tems. Donc, l'arc $OA = \alpha = \sqrt{(uu + vv)}$ surpasseroit bientôt les bornes de la petitesse que je lui ai supposée; & partant notre solution exclut absolument ce cas. Il est donc très remarquable, que si le mouvement du centre de force F étoit au mouvement diurne de la planete comme $aa : 2bb$; le mouvement diurne seroit bientôt considérablement troublé, quoiqu'il ait commencé autour d'un axe principal, Ainsi pour la terre, où $aa = bb$ fort à peu près, si la lune achevoit ses révolutions en deux jours, au lieu de 27, l'axe de rotation de la terre souffriroit des dérangemens terribles, qu'il n'y auroit presque pas moyen d'assigner.

37. Mais il y a apparence qu'un tel cas n'existe nulle part dans l'Univers, ou du moins dans notre systeme planétaire, auquel s'étendent nos recherches. J'ai déjà marqué que, si la lune étoit deux ou trois fois plus éloignée de la terre, qu'elle ne l'est effectivement, son mouvement seroit si irrégulier, qu'il nous seroit presque impossible d'en acquérir seulement une connoissance grossiere: car pour une connoissance parfaite, il s'en faut beaucoup que nous la puissions acquérir jamais. Si la lune étoit beaucoup plus proche de la terre, nous pourrions plus exactement déterminer son mouvement, mais à présent nous appercevons un autre inconvénient qui rendroit indéterminable la nutation de l'axe de la terre. De là il semble résulter que la Providence a bien voulu offrir à nos recherches de tels objets, qui ne surpassent pas absolument la portée de notre esprit, quoiqu'il nous fût impossible de les approfondir tout à fait. Peut-être que tels mouvemens qui nous seroient inaccessibles, se trouvent en d'autres systemes planétaires, où les créatures intelligentes sont douées d'un plus haut degré de pénétration.

38. Supposons donc que le quarré du nombre $m = \frac{\epsilon a a}{\delta v b}$ differe assez considérablement de 4, pour que les quantités u & v demeurent toujours très petites, & que l'hypothese de la petitesse de l'arc OA $= \alpha = \sqrt{(uu + vv)}$ demeure inaltérée. Alors la solution que nous venons de trouver, nous découvrira assez exactement les phénomenes du mouvement de rotation du corps proposé. Car ayant trouvé

$$u = \frac{n}{2m}\sin 2\mathfrak{l} + \frac{n(2 + m\cos\mathfrak{l})\sin\mathfrak{l}}{mm - 4}\cos 2\Phi + D\sin(m\Phi + \xi)$$

$$v = -\frac{n(m + 2\cos\mathfrak{l})\sin\mathfrak{l}}{mm - 4}\sin 2\Phi + D\cos(m\Phi + \xi)$$

nous aurons $\alpha = \sqrt{(uu + vv)}$; & $\tang\omega = \frac{v}{u}$. Ensuite, à cause de $dl = \frac{\epsilon v d\Phi}{\delta}$, & $d\lambda = -\frac{\epsilon u d\Phi}{\delta \sin\mathfrak{l}}$:

$$l = \mathfrak{l} + \frac{\epsilon n(m + 2\cos\mathfrak{l})\sin\mathfrak{l}}{2\delta(mm - 4)}\cos 2\Phi + \frac{\epsilon D}{\delta m}\sin(m\Phi + \xi)$$

$$\lambda = \text{Const.} - \frac{\epsilon n\cos\mathfrak{l}}{\delta m}\Phi - \frac{\epsilon n(2 + m\cos\mathfrak{l})}{2\delta(mm - 4)}\sin 2\Phi + \frac{\epsilon D}{\delta m\sin\mathfrak{l}}\cos(m\Phi + \xi)$$

& enfin $r = \text{Const.} - \lambda\cos\mathfrak{l} + \epsilon t$, & $\varrho = \omega - r$.

Application au mouvement de rotation de la Terre.

39. Pour appliquer ces formules à la terre, il convient de prendre le point P dans le pole de l'écliptique, de sorte que quand F marque la lune, l'arc PF $= p$ n'est pas un quart de cercle, & par-
Fig. 5.
tant il faut recourir aux formules générales du §. 28. Soit donc le cercle ♈☊L♎ l'écliptique, ☊ le noeud ascendant de l'orbite de la lune ☊FM, & que la lune se trouve présentement en F à la distance de la terre $= s$, que je regarde comme constante. Que la force at-

attractrice de la lune à la distance $= e$ soit égale à la gravité. Le point fixe ♈ ne soit pas l'équinoxe, mais plutôt la premiere étoile du bélier, duquel la longitude du noeud ascendant soit ♈☊ $= \zeta$, & l'inclinaison de l'orbite de la lune à l'écliptique ou l'angle F☊L $= \gamma$, que je regarde comme constante, pendant que l'arc ζ diminue uniformement, pour lequel mouvement je pose $d\zeta = -\beta dt$. Ensuite, soit la longitude de la lune comptée depuis ♈, ou l'arc ♈☊L $= q$, que je suppose aussi proportionel au tems, de sorte que $dq = \delta dt$; puisque l'inégalité du mouvement n'influe presque point sur le mouvement de l'axe de la terre.

40. Ayant donc l'arc ☊L $= q - \zeta$, & l'angle L☊F $= \gamma$, puisque γ n'excede pas 5°, nous aurons assez près $\sin FL = \gamma \sin(q - \zeta)$, & $\cos FL = 1$, négligeant les termes où γ auroit plus d'une dimension, de sorte que $\sin p = 1$, & $\cos p = \gamma \sin(q - \zeta)$. Soit à présent l'axe de la terre en A, par rapport auquel le moment d'inertie de la terre soit $= Maa$, & par rapport aux autres axes principaux $= Mbb$. Posons l'arc PA $= l$, & l'angle ♈PA $= \lambda$: soit de plus AB le premier méridien tiré sur la terre, & l'angle PAB $= r$: & que la terre tourne présentement autour du pole O dans le sens ♈L♎ suivant l'ordre des signes, avec la vitesse angulaire $= \varepsilon$: & soit l'arc AO $= \alpha$, que je suppose extrèmement petit, & l'angle BAO $= \varrho$. Or j'ai posé $r + \varrho = \omega$, & outre cela $\alpha \cos\omega = u$, & $\alpha \sin\omega = v$.

41. Soutrayons la longitude du pole terrestre A de la longitude de la lune, & soit l'angle APF $= q - \lambda = \Phi$, qui cidessus étoit $-\Phi$, & nous aurons:

$$dl = -\varepsilon v dt;\ d\lambda = \frac{\varepsilon u dt}{\sin l};\ d\Phi = \delta dt - \frac{\varepsilon u dt}{\sin l},\ \&\ dr = \varepsilon dt - \frac{\varepsilon u dt \cos l}{\sin l}.$$

 Main-

Maintenant tout revient à la résolution de ces deux équations:

$$\varepsilon du + \frac{\varepsilon\varepsilon aa}{bb} v dt - \frac{6gee}{s^3}\left(1 - \frac{aa}{bb}\right) dt \sin\Phi (\sin l \cos\Phi + \gamma \cos l \sin(q-\zeta)) = 0,$$

$$\varepsilon dv - \frac{\varepsilon\varepsilon aa}{bb} u dt + \frac{6gee}{s^3}\left(1 - \frac{aa}{bb}\right) dt (\sin l \cos\Phi + \gamma \cos l \sin(q-\zeta))(\cos l \cos\Phi - \gamma \sin l \sin(q-\zeta)) = 0.$$

Posons pour abréger $\frac{\varepsilon aa}{bb} = \mu$, & $\frac{3gee}{\varepsilon s^3}\left(\frac{aa}{bb} - 1\right) = \nu$,

& nous aurons:

$$du + \mu v dt + \nu dt \sin\Phi (\sin l \cos\Phi + \gamma \cos l \sin(q-\zeta)) = 0$$

$$dv - \mu u dt - 2\nu dt (\sin l \cos\Phi + \gamma \cos l \sin(q-\zeta))(\cos l \cos\Phi - \gamma \sin l \sin(q-\zeta)) = 0$$

ou en réduisant:

$$du + \mu v dt + \nu dt (\sin l \sin 2\Phi + \gamma \cos l \cos(\zeta-\lambda) - \gamma \cos l \cos(2q-\zeta-\lambda)) = 0$$

$$dv - \mu u dt - \nu dt (\sin l \cos l + \sin l \cos l \cos 2\Phi - \gamma \cos 2l \sin(\zeta-\lambda) + \gamma \cos 2l \sin(2q-\zeta-\lambda) - \gamma\gamma \sin l \cos l) = 0$$

42. Maintenant, sans répéter l'intégration générale, puisque nous en connoissons la forme, posons

$$u = A + B\cos 2\Phi + C\sin(\zeta-\lambda) + D\sin(2q-\zeta-\lambda) + \mathfrak{C}\sin(\mu t+\xi)$$

$$v = E\sin 2\Phi + F\cos(\zeta-\lambda) + G\cos(2q-\zeta-\lambda) - \mathfrak{C}\cos(\mu t+\xi)$$

& puisque $d\Phi = \delta dt$, $d\zeta = \mathcal{E} dt$, $dq = \delta dt$, & $d\lambda = o dt$, parce que nous négligeons les termes où les petites quantités entreroient de nouveau; nous aurons

$$\frac{du}{dt} = -2B\delta\sin 2\Phi - C\mathcal{E}\cos(\zeta-\lambda) + D(2\delta+\mathcal{E})\cos(2q-\zeta-\lambda) + \mathfrak{C}\mu\cos(\mu t+\xi)$$

$$\frac{dv}{dt} = 2E\delta\cos 2\Phi + F\mathcal{E}\sin(\zeta-\lambda) - G(2\delta+\mathcal{E})\sin(2q-\zeta-\lambda) + \mathfrak{C}\mu\sin(\mu t+\xi)$$

Or dans les équations différentielles il est permis de regarder l'arc PA = l comme constant, & de mettre à la place de l sa valeur moyenne qui soit = I comme ci-dessus. Il ne reste donc qu'à substituer ces valeurs supposées.

43.

43. Or la premiere équation par dt divisée donne

$$\left.\begin{array}{llll} -2B\delta\sin 2\varphi - C\beta\cos(\zeta-\lambda) + D(2\delta+\beta)\cos(2q-\zeta-\lambda) + \mathfrak{C}\mu\cos(\mu t+\xi) \\ +E\mu \quad\quad +F\mu \quad\quad\quad +G\mu \quad\quad\quad\quad\quad\quad -\mathfrak{C}\mu \\ +\nu\sin l \quad +\nu\gamma\cos l \quad -\nu\gamma\cos l \end{array}\right\} = 0$$

& l'autre donne:

$$\left.\begin{array}{l} +2E\delta\cos 2\varphi + F\beta\sin(\zeta-\lambda) - G(2\delta+\beta)\sin(2q-\zeta-\lambda) + \mathfrak{C}\mu\sin(\mu t+\xi) \\ -\mu A \quad -B\mu \quad\quad -C\mu \quad\quad -D\mu \quad\quad\quad\quad\quad -\mathfrak{C}\mu \\ -\nu\sin l\cos l - \nu\sin l\cos l + \nu\gamma\cos 2l \quad -\nu\gamma\cos 2l \\ +\nu\gamma\gamma\sin l\cos l \end{array}\right\} = 0$$

Egalant à zéro tous ces membres séparément, nous en tirons d'abord:

$$A = -\frac{\nu}{\mu}(1-\gamma\gamma)\sin l\cos l = -\frac{\nu}{2\mu}(1-\gamma\gamma)\sin 2l.$$

& ensuite:

$$-2B\delta + E\mu + \nu\sin l = 0; \quad -B\mu + 2E\delta - \nu\sin l\cos l = 0,$$
$$-C\beta + F\mu + \nu\gamma\cos l = 0; \quad -C\mu + F\beta + \nu\gamma\cos 2l = 0,$$
$$D(2\delta+\beta) + G\mu - \nu\gamma\cos l = 0; \quad -D\mu - G(2\delta+\beta) - \nu\gamma\cos 2l = 0,$$

44. Les coëfficiens B, C, D, E, F, G, auront donc les valeurs suivantes:

$$B = -\frac{\nu\sin l(2\delta+\mu\cos l)}{\mu\mu-4\delta\delta}; \quad E = -\frac{\nu\sin l(2\delta\cos l+\mu)}{\mu\mu-4\delta\delta}$$

$$C = -\frac{\nu\gamma(\beta\cos l-\mu\cos 2l)}{\mu\mu-\beta\beta}; \quad F = +\frac{\nu\gamma(\beta\cos 2l-\mu\cos l)}{\mu\mu-\beta\beta}$$

$$D = -\frac{\nu\gamma((2\delta+\beta)\cos l+\mu\cos 2l)}{\mu\mu-(2\delta+\beta)^2}; \quad G = +\frac{\nu\gamma((2\delta+\beta)\cos 2l+\mu\cos l)}{\mu\mu-(2\delta+\beta)^2}.$$

& comme nous avons trouvé $A = -\frac{\nu}{\mu}(1-\gamma\gamma)\sin l\cos l$,

 où

où au lieu de γ on peut mettre sin γ, & cos $\gamma^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\gamma$, au lieu de $1 - \gamma\gamma$: or γ marque l'inclinaison moyenne de l'orbite de la lune à l'écliptique. Pour les deux autres constantes $\mathfrak{C}$ & ξ, elles demeurent arbitraires comme la nature des intégrales complettes l'exige. Ces parties auroient lieu, quand même la force de la lune renfermée dans la lettre ν évanouiroit.

45. Ayant trouvé ces coëfficiens, il ne sera plus difficile d'assigner les autres quantités qui déterminent le mouvement. Or d'abord le différentiel $dl = -\varepsilon v dt$ donne

$$l = \mathfrak{l} + \frac{E\varepsilon}{2\delta}\cos 2\phi + \frac{F\varepsilon}{\mathfrak{G}}\sin(\zeta - \lambda) - \frac{G\varepsilon}{2\delta + \mathfrak{G}}\sin(2q - \zeta - \lambda) + \frac{\mathfrak{C}\varepsilon}{\mu}\sin(\mu t + \xi),$$

d'où l'on connoit pour chaque tems la distance du pole de la terre A au pole de l'écliptique P. Ensuite, pour la longitude du pole terrestre A, ou l'angle ♈ P A $= \lambda$, on aura

$$\lambda = \text{Const.} + \frac{A\varepsilon t}{\sin \mathfrak{l}} + \frac{B\varepsilon}{2\delta \sin \mathfrak{l}}\sin 2\phi + \frac{D\varepsilon}{\mathfrak{G}\sin \mathfrak{l}}\cos(\zeta - \lambda) - \frac{D\varepsilon}{(2\delta + \mathfrak{G})\sin \mathfrak{l}}\cos(2q - \zeta - \lambda) - \frac{\mathfrak{C}\varepsilon}{\mu \sin \mathfrak{l}}\cos(\mu t + \xi).$$

Ensuite, pour l'angle PAB $= r$, ou le mouvement du premier méridien, on aura $r = \varepsilon t - \lambda \cos \mathfrak{l}$. Enfin, pour le pole de rotation O, on aura la distance AO $= \alpha = \sqrt{(uu + vv)}$, & posant la somme des angles OAB + BAO $= r + \varrho = \omega$, puisque tang $\omega = \frac{v}{u}$, on aura l'angle BAO $= \varrho = \omega - r$. Par ce moyen on acquiert une parfaite connoissance du mouvement diurne de la terre.

46.

46. Quoique ces formules regardent proprement l'effet de la lune, il eſt aiſé de les appliquer à celui du ſoleil, en poſant $\gamma = 0$, & alors δ marquera le mouvement moyen du ſoleil, ou l'arc décrit dans une ſeconde. Pour ne pas confondre ces deux effets enſemble, ſoit la longitude du ſoleil depuis la premiere étoile du bélier $= Q$, & ſon mouvement moyen, ou l'angle parcouru dans ſon orbite pendant une ſeconde $= \Delta$. Puisque λ marque l'angle ♈ P A, cette même lettre λ exprime la longitude du ſolſtice d'été depuis le même terme ♈: donc $\lambda - 90^\circ$ ſignifie la longitude de l'équinoxe du printems, & $Q - \lambda$ la longitude du ſoleil depuis le ſolſtice d'été qui ſoit $= \Phi$. Par conſéquent, ſi nous poſons la longitude du ſoleil depuis l'équinoxe du printems $= \Psi$, nous aurons $\Psi = \Phi + 90^\circ$, & partant $\Phi = \Psi - 90^\circ$, & $2\Phi = 2\Psi - 180^\circ$.

47. Maintenant, ſi la force du ſoleil à la diſtance $= e$, eſt égale à gravité, à la diſtance de la terre qui eſt ſuppoſée $= s$, elle ſera $= \frac{ee}{ss}$ poſant la gravité $= 1$. Or la viteſſe de la terre dans ſon orbite étant $= \Delta s$, la hauteur d'où un corps tombant acquiert la même viteſſe, ſera $= \frac{\Delta\Delta ss}{4g}$, laquelle étant diviſée par la moitié de la diſtance $\frac{s}{2}$, donne la force centrifuque $= \frac{\Delta\Delta s}{2g}$ qui doit être égale à la force centrale $\frac{ee}{ss}$, d'où nous tirons $\frac{2gee}{s^3} = \Delta\Delta$. Soit N la valeur de la lettre ν pour le ſoleil, & nous aurons

$$N = \frac{3\Delta\Delta}{2\epsilon}\left(\frac{aa}{bb} - 1\right),$$

où ϵ marque la viteſſe angulaire du mouvement diurne de la terre; & $\mu = \frac{\epsilon aa}{bb}$. De là nous aurons:

A =

$$A = -\frac{3\Delta\Delta}{2\epsilon\epsilon aa}(aa-bb)\sin l\cos l; \quad \text{ou} \quad A = \frac{-N}{\mu}\sin l\cos l,$$

$$B = \frac{-N(2\Delta + \mu\cos l)\sin l}{\mu\mu - 4\Delta\Delta}; \qquad E = \frac{-N(2\Delta\cos l + \mu)\sin l}{\mu\mu - 4\Delta\Delta},$$

& ensuite $C = 0$, $F = 0$, $D = 0$, $G = 0$.

48. Donc, pour la distance du pole de la terre A au pole de l'écliptique P, nous aurons:

$$PA = l = l + \frac{N\epsilon(2\Delta\cos l + \mu)\sin l}{2\Delta(\mu\mu - 4\Delta\Delta)}\cos 2\Psi + \frac{\mathfrak{C}\epsilon}{\mu}\sin(\mu t + \xi)$$

& pour sa longitude, ou l'angle $\Upsilon AA = \lambda$:

$$\lambda = \text{Const.} - \frac{N\epsilon t\cos l}{\mu} + \frac{N\epsilon(2\Delta + \mu\cos l)}{2\Delta(\mu\mu - 4\Delta\Delta)}\sin 2\Psi - \frac{\mathfrak{C}\epsilon}{\mu\sin l}\cos(\mu t + \xi)$$

Le mouvement de rotation du premier méridien AB autour du pole A peut être regardé comme constant, sa vitesse angulaire étant $= c$. Or pour le vrai pole de rotation O, on ne le sauroit assigner, sans avoir déterminé l'effet de toutes les forces qui agissent sur la terre. Car il faut chercher les valeurs complettes des deux lettres u & v, qui résultent de toutes les forces, & alors on aura $AO = \sqrt{(uu + vv)}$, $\tan\omega = \frac{v}{u}$, & de là l'angle $BAO = \omega - r = \omega - PAB$. Mais dans la terre les points A & O sont indiscernables.

49. Pour la lune, la distance e, où sa force attractrice seroit égale à la gravité, nous est inconnue, & partant aussi la valeur de la lettre ν. Mais on peut conclure le rapport des lettres ν & N des effets que la lune & soleil produisent dans les marées, qui leur sont proportionels. Cependant cette conclusion ne sauroit être portée au plus haut degré de précision. Newton croyoit, que la valeur de ν rapportée à la lune étoit environ quatre fois plus grande que celle de N qui se rapporte au soleil. Or M. Daniel Bernoulli a prouvé que ce

ce rapport n'excede pas beaucoup la raiſon double. Poſons donc $\nu = m\mathrm{N}$, de ſorte que m ſoit un nombre plus grand que 2. Soit enſuite la longitude de la lune depuis l'équinoxe du printems $= \psi$ de ſorte que $\Phi = \psi - 90°$, & $2\Phi = 2\psi - 180°$; & que δ ſoit l'angle décrit par la lune dans une ſeconde, & β l'angle dont les noeuds de la lune reculent en même tems. Poſons la longitude du noeud aſcendant depuis l'équinoxe du printems $= \theta$, & on aura $\theta = \zeta - \lambda + 90$, & $\zeta - \lambda = \theta - 90°$. Donc, puisque $q = \Phi + \lambda = \psi + \lambda - 90°$, & $\zeta = \theta + \lambda - 90°$, nous aurons $2q - \zeta - \lambda = 2\psi - \theta - 90°$.

50. Introduiſons ces angles que l'Aſtronomie découvre pour chaque tems, & nous aurons la diſtance du pole de la terre **A** au pole de l'écliptique P:

$$\mathrm{PA} = l = \mathrm{I} + \frac{m\mathrm{N}\epsilon(\mu - \delta\cos\mathrm{I})\sin\mathrm{I}}{2\delta(\mu\mu - \delta\delta)}\cos 2\psi + \frac{m\mathrm{N}\epsilon(\mu\cos\mathrm{I} - \beta\cos 2\mathrm{I})\sin\gamma}{\beta(\mu\mu - \beta\beta}\cos\theta$$

$$+ \frac{m\mathrm{N}\epsilon(\mu\cos\mathrm{I} + (2\delta+\beta)\cos 2\mathrm{I})\sin\gamma}{(2\delta+\beta)(\mu\mu - (2\delta+\beta)^2)}\cos(2\psi - \theta) + \frac{\mathfrak{C}\epsilon}{\mu}\sin(\mu t + \xi),$$

& ſa longitude comptée depuis la premiere étoile du bélier

$$\Upsilon\mathrm{PA} = \lambda = \mathrm{Conſt.} - \frac{m\mathrm{N}\epsilon t\cos\gamma^2\cos\mathrm{I}}{\mu} + \frac{m\mathrm{N}\epsilon(2\delta + \mu\cos\mathrm{I}}{2\delta(\mu\mu - 4\delta\delta)}\sin 2\psi - \frac{\mathfrak{C}\epsilon}{\mu\sin\mathrm{I}}\cos(\mu t + \xi)$$

$$- \frac{m\mathrm{N}\epsilon(\beta\cos\mathrm{I} - \mu\cos 2\mathrm{I})\sin\gamma}{\beta(\mu\mu - \beta\beta)\sin\mathrm{I}}\sin\theta + \frac{m\mathrm{N}\epsilon(\mu\cos 2\mathrm{I} + (2\delta+\beta)\cos\mathrm{I})\sin\gamma}{(2\delta+\beta)(\mu\mu - (2\delta+\beta)^2)\sin\mathrm{I}}\sin(2\psi - \theta).$$

Maintenant on n'a qu'à combiner enſemble ces anomalies avec celles que produit la force du ſoleil, pour avoir les dérangemens entiers que ſouffre le pole de la terre A, tant par rapport à ſa diſtance du pole de l'écliptique, qu'à ſa longitude comptée depuis la premiere étoile du bélier.

51. Avant que de déveloper les effets des forces du Soleil & de la Lune, je remarque que, quand même ces forces évanouiroient, il feroit poſſible, que l'axe de la terre A ne fût pas immobile. Car, poſant $N = o$, on aura encore $PA = l = I + \frac{\mathfrak{C}\varepsilon}{\mu} \text{fin}\,(\mu t + \xi)$, & $\Upsilon PA = \lambda = \text{Conſt.} - \frac{\mathfrak{C}\varepsilon}{\mu\,\text{fin}\,I} \text{cof}\,(\mu t + \xi)$, où la conſtante $\mathfrak{C}$ ne dépend pas des forces du Soleil & de la Lune, de ſorte que ſi ellle n'étoit pas $= o$, l'axe de la terre ſouffriroit quelque nutation, pendent que la terre tourneroit uniformement autour
Fig. 6. de lui. Car, prenant l'arc $P\alpha = I$, le pole de la terre A décriroit uniformement un cercle 1, 2, 3, 4, autour du point fixe α, en même ſens que le mouvement diurne, & le rayon de ce cercle αA feroit $\frac{\mathfrak{C}\varepsilon}{\mu}$, ou d'une grandeur arbitraire, la viteſſe angulaire étant $= \mu = \frac{aa}{bb}\varepsilon$. Ce cas auroit lieu, ſi la terre avoit commencé à tourner autour d'un axe différent de ſes axes principaux. Puiſqu'on ne ſauroit aſſurer, que la conſtante $\mathfrak{C}$ ſoit abſolument $= o$, il eſt important d'expliquer les phénomenes de cette nutation de l'axe.

52. La terre tourneroit donc uniformement autour de ſon axe principal A, avec la viteſſe angulaire $= \varepsilon$, pendant que l'axe luimême A décriroit autour d'un point fixe α un cercle avec la viteſſe angulaire $= \frac{aa}{bb}\varepsilon$. Soit T le tems d'une révolution de la terre autour de l'axe, & le tems d'une révolution de l'axe autour du point fixe α ſera $= \frac{bb}{aa}$T. S'il étoit $bb = aa$, ces deux tems feroient égaux, & le point de la terre qui auroit répondu une fois au point fixe α, lui répondroit toujours; & partant on prendroit ce point α plutôt que A pour le pole de la terre; & en effet dans ce cas tous les mo-

momens d'inertie de la terre ſeroient égaux entr'eux. Mais, ſi les momens d'inertie Maa & Mbb ne ſont pas égaux, il n'y a aucun point ſur la terre qui demeure en repos, & le mouvement du pole A ſera le moins compliqué, de ſorte que dans ce cas on n'ait aucune raiſon de regarder plutôt quelqu'autre point de la terre comme ſon pole.

53. Poſons le rayon du petit cercle 1, 2, 3, 4, que décrit l'axe de la terre A autour du point fixe α, ou l'arc $\alpha A = \sigma$, & puisque la diſtance du pole A au pole de l'écliptique P eſt égale à l'obliquité de l'écliptique, & que la longitude du pole A répond au ſolſtice d'été, il s'enſuit que, dans l'intervalle de tems $\frac{bb}{aa}T$, l'obliquité de l'écliptique varie de la quantité 2σ, & les points équinoctiaux ſouffrent un changement dans leur longitude, qui ſera $= \frac{2\sigma}{\sin l} = 5\sigma$. Or, pendant chaque intervalle de tems $= \frac{bb}{aa}T$, les mêmes inégalités reviennent. Puisque la terre eſt un ſphéroïde elliptique, dont le diametre de l'équateur eſt à l'axe comme 201 à 200 à peu près, ſi la terre étoit homogene, il y auroit $\frac{bb}{aa} = 1 - \frac{1}{201}$, & le période de ces inégalités ſeroit $= \frac{200}{201} \cdot 24$ heures, ou de $23^h, 53'$. Dans cet intervalle de tems, les variations dans l'obliquité de l'écliptique & la longitude des points équinoctiaux, ſeront d'autant plus grandes, plus ſera grand le rayon du cercle σ. A moins que ce rayon n'évanouiſſe entierement, il eſt certain qu'il eſt extrèmement petit; & ce ſeroit un grand probleme pour les Aſtronomes, que de decouvrir ces inégalités.

54. On m'objectera peut-être, que dans ce cas on ne prendroit pas l'extremité de l'axe A pour le pole de la terre, mais plutôt le point α, qui ſeroit effectivement le pole de rotation, ſi aa étoit

égal à bb. Mais la moindre inégalité entre aa & bb renverſe tout à fait cette idée; car, quoique le point α ne change pas ſenſiblement de place pendant quelques révolutions, il décrira une eſpece de ſpirale, dont les tours deviennent de plus en plus larges, & ſi $\frac{bb}{aa} = 1 - \frac{1}{2\,0\,1}$, après 50 révolutions ou jours, le point α ſe trouvera dans le cercle même 1, 2, 3, 4, & après 100 jours il décrira un cercle dont le diametre eſt deux fois plus grand. Enſuite, ſes tours ſe rétréciront, de ſorte qu'après 200 jours il retourne au centre du cercle 1, 2, 3, 4; d'où l'on voit que ce point ne ſeroit nullement propre pour y rapporter le mouvement diurne, mais qu'il faudroit ſe tenir abſolument au vrai axe de la terre A, qui décrit le cercle 1, 2, 3, 4.

55. Pour les inégalités cauſées par les forces du ſoleil & de la lune, elles ſont indépendantes de celle-ci, qui réſulteroit de la nature de la terre même, pourvu qu'elle ne fut pas conſidérable, comme le calcul expoſé le ſuppoſe. Nous pourrons donc regarder le cercle 1, 2, 3, 4, comme tout à fait évanouiſſant, & cela d'autant plus qu'il n'y a aucune obſervation, d'où nous pourrions conclure le contraire. Examinons donc plus ſoigneuſement les inégalités qui ſont produites par les forces du ſoleil & de la lune, & qui ſont contenues dans les variations de l'arc $PA = l$, & de l'angle $\Upsilon PA = \lambda$. Or l'arc l exprime l'obliquité, & λ la longitude du point ſolſtitial d'été, comptée depuis la premiere étoile du bélier. Donc $\lambda - 90°$ ſera la longitude du point équinoctial du printems, & partant réciproquement $90° - \lambda$ la longitude de la premiere étoile d'*aries* depuis le point équinoctial du printems. Il s'agit donc de déterminer pour chaque tems propoſé tant la longitude de la premiere étoile d'aries depuis le point équinoctial que l'obliquité de l'écliptique.

56. Or les formules que nous venons de trouver, renferment deux élémens, dont nous ne connoiſſons point la juſte valeur. L'un eſt le nombre m, qui marque combien la force de la lune eſt plus grande

grande que celle du ſoleil dans la production des marées, & nous ſavons par les judicieuſes réflexions de Mr. Bernoulli que ce nombre m eſt environ $2\frac{1}{2}$. L'autre élément eſt la fraction $\frac{aa}{bb}$, dont nous ne connoiſſons pas abſolument la valeur, car la connoiſſance de la figure extérieure de la terre n'y détermine rien, à moins que la terre ne ſoit compoſée d'une matiere homogene, auquel cas nous aurions à peu près $\frac{aa}{bb} = \frac{201}{200}$. Mais, puisqu'il eſt très probable que la matiere de la terre n'eſt rien moins qu'homogene, & que ſa diſtribution nous eſt tout à fait inconnue, je poſerai $\frac{aa}{bb} = n$, de ſorte que $\mu = \varepsilon n$, & je regarderai le nombre n comme inconnu, quoiqu'on puiſſe aſſurer qu'il ne differe pas ſenſiblement de l'unité. De là nous aurons $N = \frac{3(n-1)\Delta\Delta}{2\varepsilon}$, & il faudra conclure par les phénomenes les juſtes valeurs des deux nombres m & n.

57. Pour les viteſſes angulaires ε, Δ, δ, & $\mathfrak{E}$, il ſuffit d'en connoitre les rapports, qui entrent ſeulement dans nos formules. Prenons donc leurs valeurs pour un jour, où la terre fait une révolution entiere autour de ſon axe, de ſorte que $\varepsilon = 360° = 1296000''$. Enſuite les tables Aſtronomiques nous donnent ſelon les moyens mouvemens:

le mouvement journalier du ſoleil $\Delta =$	$59', 8''$	$= 3548''$
- - - - - - de la Lune $\delta =$	$13°, 10', 35''$	$= 47435''$
- - - - du noeud en arriere $\mathfrak{E} =$	$3', 11''$	$= 191''$

& partant nous aurons:

$\varepsilon = 1296000; \quad \mu = 1296000n$

$\Delta = 3548; \quad \delta = 47435$

$\beta = 191; \quad 2\delta + \beta = 95061$

ou bien ces fractions proportionelles

$\varepsilon = 1,0000000; \quad \varepsilon\varepsilon = 1,0000000$

$\Delta = 0,0027376; \quad \Delta\Delta = 0,0000075$

$\delta = 0,0366011; \quad \delta\delta = 0,0013396$

$\beta = 0,0001474; \quad \beta\beta = 0,0000000$

$2\delta + \beta = 0,0733495; \quad (2\delta + \beta) = 0,0053801$

L'arc PA $= I$ marquant l'obliquité moyenne de l'écliptique sera $I = 23°, 28', 30''$, & l'inclinaiſon moyenne de l'orbite de la lune peut être poſée $\gamma = 5°, 9'$.

De la Variation dans l'obliquité de l'écliptique.

58. Poſant l'obliquité moyenne de l'écliptique $= I$, qui eſt pour le commencent de ce ſiecle $= 23°, 28', 43''$, & pour la fin $= 23°, 27', 55''$, la premiere correction dépend de la longitude du ſoleil, qui étant poſée $= \Psi$, la correction ſera

$$+ \frac{3(n - 1)\Delta(\varepsilon n + 2\Delta \operatorname{cof} I)\operatorname{fin} I}{4(\varepsilon\varepsilon nn - 4\Delta\Delta)} \operatorname{cof} 2\Psi,$$

laquelle en ſubſtituant les valeurs marquées ſe réduit à

$$+ \frac{0,0020532(n - 1)(n + 0,0054752 \operatorname{cof} I)\operatorname{fin} I}{nn - 0,0000300} \operatorname{cof} 2\Psi.$$

Si le coëfficient étoit $= 1$, il vaudroit $57°, 17', 45'' = 206265''$; donc, réduiſant ce coëfficient en minutes ſecondes, cette connexion ſera exprimée ainſi en ſecondes.

$$+ 423,503.\ \frac{(n - 1)(n + 0,0054752 \operatorname{cof} I \operatorname{fin} I}{nn - 0,0000300} \operatorname{cof} 2\Psi,$$

ou poſant pour I ſa valeur:

$$+ 168,70.\ \frac{(n - 1)(n + 0,00502)}{nn - 0,00003} \operatorname{cof} 2\Psi \text{ ſecondes.}$$

59. La seconde correction dépend de la longitude de la Lune, laquelle étant posée $= \psi$, cette correction sera

$$+ \frac{3m(n-1)\Delta\Delta(\varepsilon n + 2\delta \cos I)\sin I}{4\delta(\varepsilon\varepsilon nn - 4\delta\delta)} \cos 2\psi$$

qui se réduit à

$$+ \frac{0{,}0001538(n-1)m(n + 0{,}0732022 \cos I)\sin I}{nn - 0{,}0253584} \cos 2\psi.$$

Cette formule étant réduite à des minutes secondes, & la valeur de l'arc I substituée donne

$$+ 12{,}618. \frac{m(n-1)(n + 0{,}06710)}{nn - 0{,}00536} \cos 2\psi \text{ secondes,}$$

d'où l'on voit que cette correction est beaucoup plus petite que la précédente, puisque nous savons que le nombre m est certainement moindre que 4. D'ailleurs, il est aussi certain que le nombre n diffère très peu de l'unité, de sorte que $n - 1$ est une fraction extrêmement petite.

60. La troisieme correction dépend de la longitude du noeud ascendant, laquelle étant posée $= \theta$, cette correction sera

$$+ \frac{3m(n-1)\Delta\Delta(\varepsilon n \cos I - \beta \cos 2I)\sin\gamma}{2\beta(\varepsilon\varepsilon nn - \beta\beta)} \cos\theta$$

qui étant réduite en nombres, & ensuite en minutes secondes, devient

$$+ 1295{,}45. \frac{m(n-1)(n - 0{,}00011)}{nn} \cos\theta \text{ minutes secondes.}$$

Enfin, la quatrieme correction est proportionnelle au cosinus de l'angle $2\psi - \theta$, & exprimée en sorte :

$$+ \frac{3m(n-1)\Delta\Delta(\varepsilon n \cos I + 2\delta + \beta)\cos 2I \sin\gamma}{2(2\delta + \beta)(\varepsilon\varepsilon nn - (2\delta + \beta)^2)} \cos(2\psi - \theta,$$

qui

qui étant réduite en nombres, & enſuite en minutes ſecondes, devient

$$+\frac{2,603.m(n-1)(n+0,05459)}{nn-0,00538}\operatorname{cof}(2\psi-\theta)\text{ min. ſecondes,}$$

de ſorte que cette correction évanouit presque par rapport à la précédente.

61. Toutes ces corrections deviennent les plus grandes poſitivement, ſi $2\Psi=0$, & $2\psi=\theta=180°$, & alors elles vaudront enſemble en négligeant les petites fractions jointes aux nombres n & nn,

$$\frac{n-1}{n}(161,70+1310,671m)\text{ ſecondes.}$$

Or, ſi les mêmes angles 2Ψ; 2ψ, & θ dont de $180°$, il en réſultera la plus grande correction négative, qui ſera

$$\frac{n-1}{n}(168,70+1305,465m)\text{ ſecondes}$$

Donc, le plus grand changement dans l'obliquité de l'écliptique pourra monter à

$$\frac{n-1}{n}(337,40+2616,136m)\text{ ſecondes.}$$

Or, par les obſervations de Mr. Bradley, on ſait que ce changement eſt d'environ $18''$, ou peut-être un peu plus grand, puisque toutes les circonſtances de ſes obſervations n'ont pas concouru à montrer le plus grand changement.

De la préceſſion des Equinoxes.

62. Ici il faut conſidérer dabord le mouvement moyen des points équinoctiaux, contenu dans le termes proportionnels au tems t, qui ſont:

$$-\frac{3(n-1)\Delta\Delta}{2\varepsilon n}(1+m\operatorname{cof}\gamma^2)\,t\operatorname{cof}I,$$

d'où

d'où nous voyons que la longitude des points équinoctiaux comptée depuis la premiere étoile du bélier va en diminuant, supposé que $n > 1$: ou bien la longitude de cette étoile comptée depuis l'équinoxe croit avec le tems. Cherchons donc cet accroissement pour le tems d'une année, & alors Δt vaudra $360°$, & partant la précession annuelle des équinoxes sera

$$= \frac{3(n-1)\Delta}{2\varepsilon n}(1 + m \cos \gamma^2) \cos l.\ 360°,$$

qui se réduit à $0,0037666\,(1 + 0,991943\,m)\,\frac{(n-1)}{n}.\ 360°$,

ou bien à $\frac{n-1}{n}(1 + 0,991943\,m).\ 4881\frac{1}{2}$ secondes.

Or on sait par les observations, & les remarques que j'ai faites sur l'action des planetes, que cette précession est de $50\frac{1}{3}$ secondes.

63. Maintenant, si nous supposons la plus grande variation dans l'obliquité de l'écliptique de $18''$, & que cette différence ait été observée à la même saison de l'année, de sorte que l'angle Ψ, ou la longitude du soleil, n'y ait pas influé, nous aurons ces deux équations pour en déterminer les deux nombres inconnus m & n,

$$22616\,m.\ \frac{n-1}{n} = 18, \qquad \&$$

$$4881\tfrac{1}{2}\,(1 + 0,991943\,m)\,\frac{n-1}{n} = 50\tfrac{1}{3},$$

donc $\frac{4881\frac{1}{2}\,(1 + 0,991943\,m)}{2616\,m} = \frac{151}{54}$, d'où nous tirons $4881\frac{1}{2} = 2472,9\,m$, & $m = 1,974$. Si au lieu de $18''$ nous avions pris tant soit peu plus, nous aurions trouvé $m = 2$, & dans ce cas il en résulteroit: $\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2513}$, & $n = \frac{2513}{2512}$. Or il semble qu'on ne sauroit mettre $m < 2$, puisque Newton a

trouvé $m = 4$, & M. Bernoulli, après avoir mieux examiné les mêmes obſervations, a conclu $m = 2\frac{1}{2}$.

64. Mais, puisque nous ne ſommes pas ſi bien aſſurés du nombre de 18″, qui marque la plus grande variation dans l'obliquité, que nous le ſommes de la préceſſion moyenne, conſidérons le nombre m comme donné, & nous aurons d'abord

$$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{96,98 + 96,20m},$$

d'où le plus grand changement dans l'obliquité de l'écliptique au lieu de 18″ ſera $= \frac{2616\,m}{96,98 + 96,20m}$ qui ſoit $= \alpha$ pour la même ſaiſon de l'année; donc les hypotheſes ſuivantes donneront

ſi	on aura		
$m = 2$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{289,38}$;	$n = \frac{289}{288}$;	$\alpha = 18\frac{1}{10}$ ſecondes,
$m = 2\frac{1}{4}$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{313,43}$;	$n = \frac{313}{312}$;	$\alpha = 18\frac{8}{10}$ ſecondes,
$m = 2\frac{1}{2}$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{337,48}$;	$n = \frac{337}{336}$;	$\alpha = 19\frac{4}{10}$ ſecondes,
$m = 2\frac{3}{4}$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{361,53}$;	$n = \frac{362}{361}$;	$\alpha = 19\frac{9}{10}$ ſecondes,
$m = 3$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{385,58}$;	$n = \frac{386}{385}$;	$\alpha = 20\frac{3}{10}$ ſecondes,
$m = 3\frac{1}{4}$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{409,63}$;	$n = \frac{410}{409}$;	$\alpha = 20\frac{7}{10}$ ſecondes,
$m = 3\frac{1}{2}$;	$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{433,68}$;	$n = \frac{434}{433}$;	$\alpha = 21\frac{1}{10}$ ſecondes,

Quand

Quand même il y auroit $m = \infty$, auquel cas il seroit $n = 1$, le plus grand changement d'obliquité de l'écliptique ne surpasseroit point $27\frac{2}{10}$ secondes.

Des inégalités dans la Précession des Equinoxes.

65. Puisque λ marque la longitude du solstice d'été depuis la premiere étoile du bélier, $\lambda - 90^\circ$ marquera celle de l'équinoxe du printems, & partant $90^\circ - \lambda$ la longitude de la premiere étoile du bélier comptée depuis l'équinoxe du printems. Donc, ayant trouvé par le mouvement moyen la longitude moyenne de la premiere étoile du bélier, que les tables astronomiques montrent sous le titre de la précession des équinoxes, en comptant $50\frac{1}{3}''$ par an, les autres termes qui entrent dans l'expression de λ étant pris négativement, donneront les inégalités périodiques qu'il faut ou ajouter ou soutraire de la longitude moyenne. De cette maniere on trouvera la longitude vraye de la premiere étoile du bélier depuis le point équinoctial pour chaque tems proposé. Mais, si l'on veut remonter à plusieurs siecles, il faut tenir compte de l'action des planetes de Jupiter & de Vénus, d'où tant l'obliquité moyenne que la précession moyenne des équinoxes est changée, comme j'ai fait voir dans le X Volume de nos Mémoires, auquel je me rapporte ici.

66. La premiere correction dépend donc de la longitude du soleil Ψ, & est proportionelle au sinus de cette longitude doublée. Cette correction est renfermée dans cette formule

$$- \frac{3(n-1)\Delta(\varepsilon n \cos I + 2\Delta)}{4(\varepsilon\varepsilon nn - 4\Delta\Delta)} \sin 2\Psi,$$

laquelle en substituant pour ε, Δ, & I, leurs valeurs se changent en celle-ci,

$$- 0{,}0018833 \cdot (n-1) \frac{(n + 0{,}0059693)}{nn - 0{,}0000300} \sin 2\Psi,$$

 la-

laquelle étant réduite en minutes fecondes donne

$$- 396,60\,(n - 1).\ \frac{n + 0,00597}{nn - 0,00003}\ \text{fin}\ 2\Psi\ \text{fecondes.}$$

Puisque $n = \frac{299}{288}$, cette correction ne fauroit jamais furpaffer $1\frac{1}{3}$ feconde, de forte quelle eft à peine fenfible. Cependant, fi l'on veut calculer exactement, il ne faut pas négliger cette petite correction.

67. La feconde correction dépend de la longitude de la lune ψ, & eft proportionelle au fin 2ψ.

$$- \frac{3\,(n - 1)\,m\Delta\Delta\,(n\epsilon\,\text{cof}\,l + 2\delta)}{4\delta\,(nn\epsilon\epsilon - 4\delta\delta)}\ \text{fin}\ 2\psi,$$

laquelle par la fubftitution fera exprimée ainfi en minutes fecondes.

$$- 29,06.\ m\,(n - 1).\ \frac{n + 0,079807}{nn - 0,0053584}\ \text{fin}\ 2\psi\ \text{fecondes.}$$

La troifieme équation dépend de la longitude du noeud afcendant θ, & eft proportionelle à fon finus,

$$- \frac{3\,(n - 1)\,m\Delta\Delta\,(n\epsilon\,\text{cof}\,2\,l - \beta\,\text{cof}\,l)\,\text{fin}\,\gamma}{2\beta\,(nn\epsilon\epsilon - \beta\beta)\,\text{fin}\,l}\ \text{fin}\ \theta,$$

laquelle étant réduite en minutes fecondes fera

$$- 2420,4.\ m\,(n - 1).\ \frac{n - 0,000198}{nn - 0,000000}\ \text{fin}\ \theta\ \text{fecondes.}$$

Enfin la quatrieme dépend de l'angle $2\psi - \theta$

$$- \frac{3\,(n - 1)\,m\Delta\Delta\,(n\epsilon\,\text{cof}\,2\,l + (2\delta + \beta)\,\text{cof}\,l\,\text{fin}\,\gamma}{2\,(2\delta + \beta)\,(nn\epsilon\epsilon - (2\delta + \beta)^2)\,\text{fin}\,l}\ \text{fin}\,(2\psi - \theta),$$

& donne en minutes fecondes

$$- 4,86.\ m\,(n - 1).\ \frac{n + 0,098557}{nn - 0,005380}\ \text{fin}\,(2\psi - \theta)\ \text{fecondes.}$$

68.

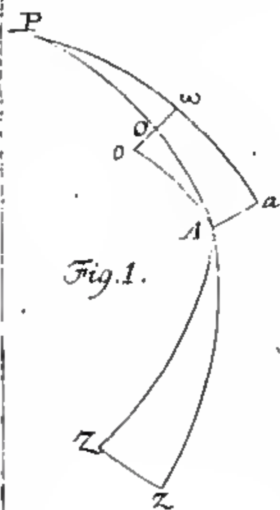


Fig. 1.

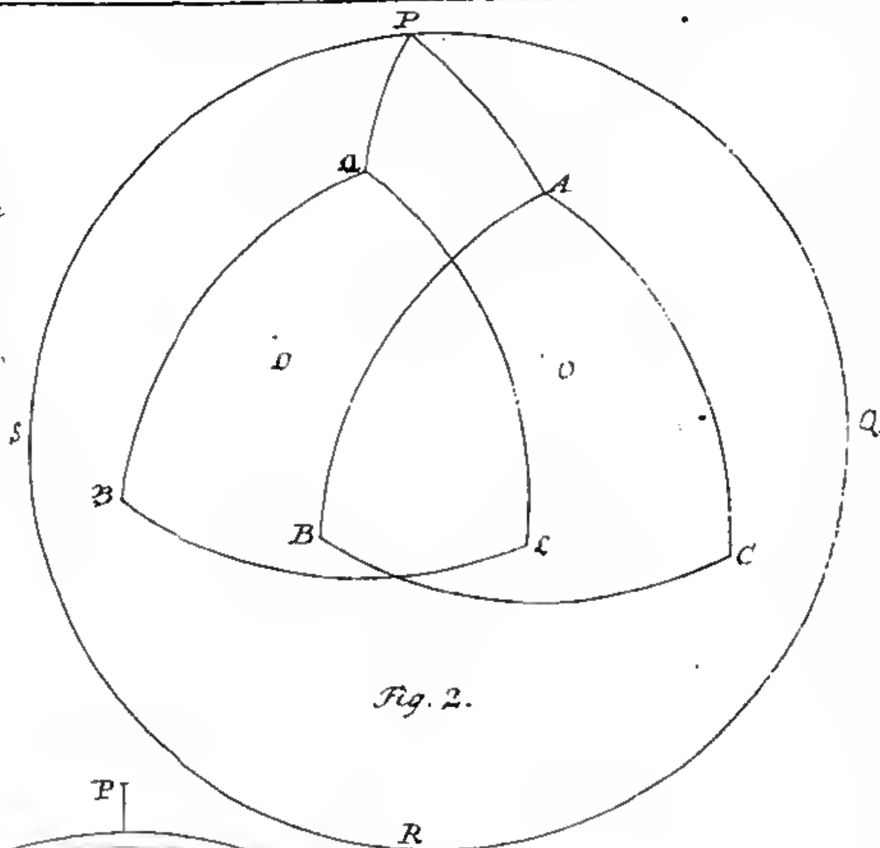


Fig. 2.

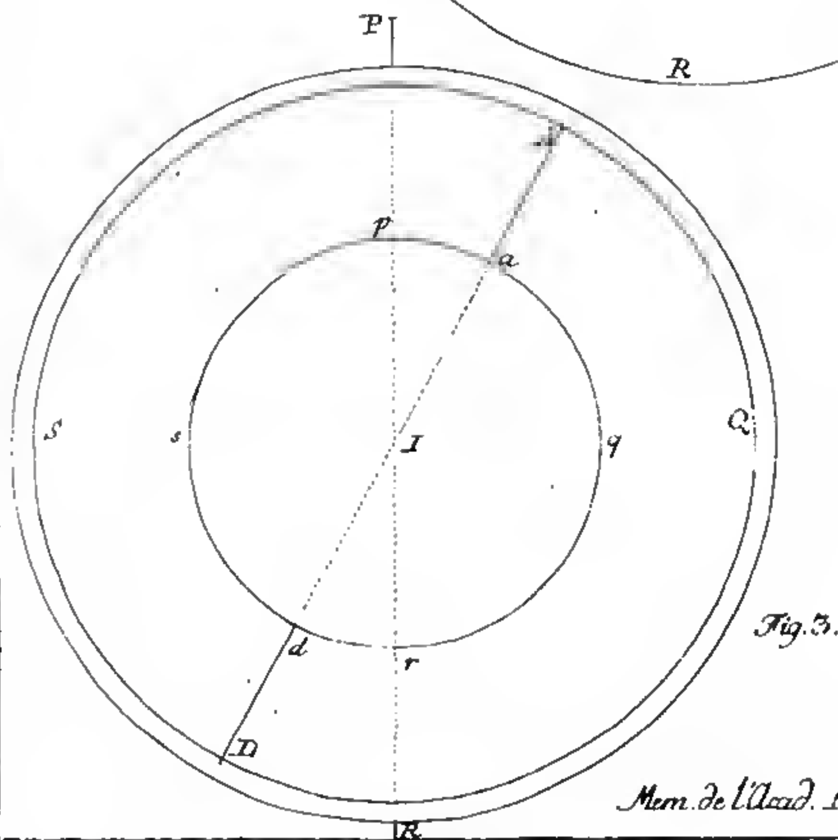
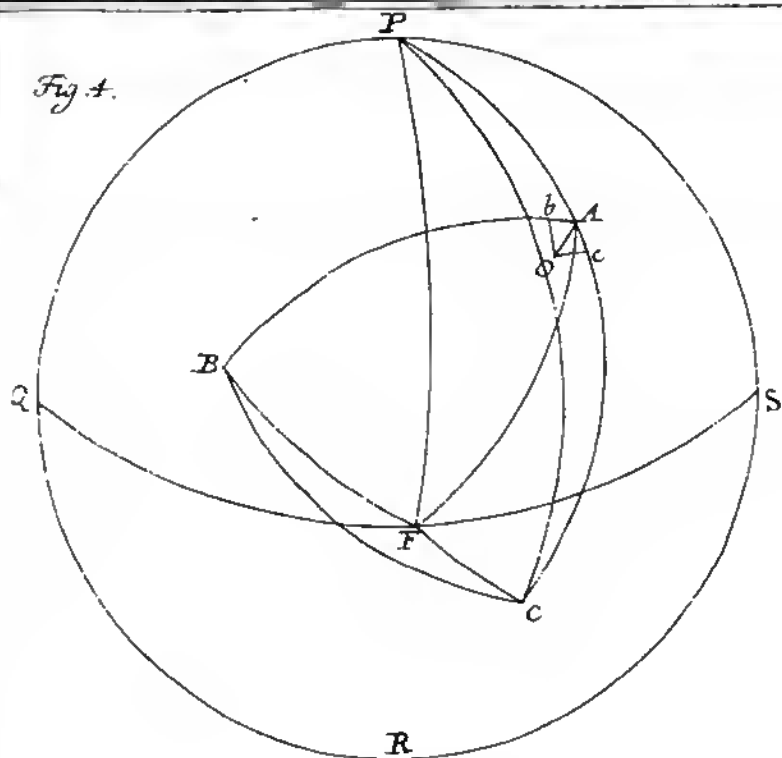
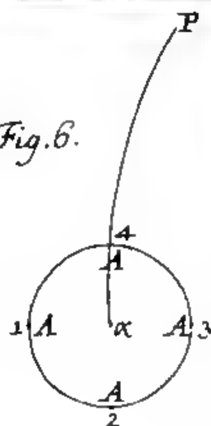
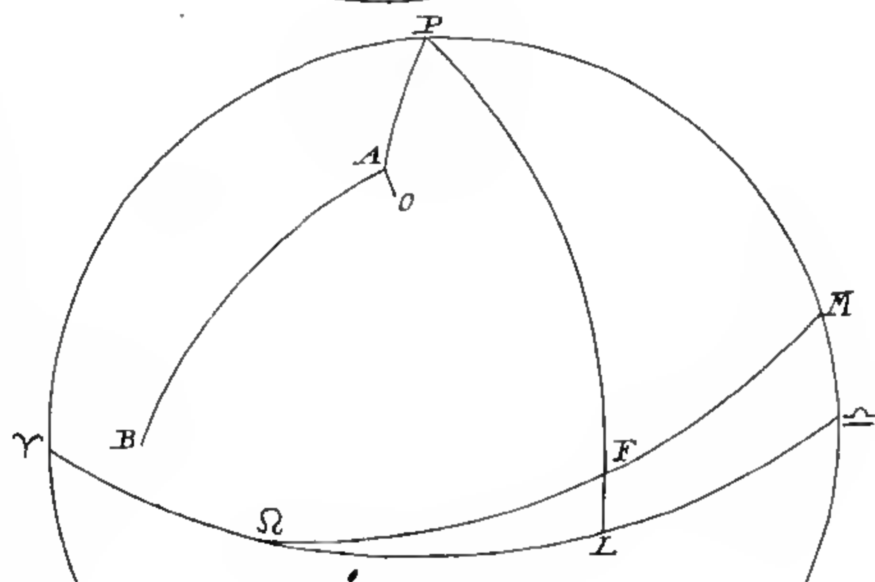


Fig. 3.

Mem. de l'Acad. 1759. Pl. 3. pag. 329.


Fig. 4.
P
b
A
o
c
B
Q
S
F
C
R


P
Fig. 6.
4
A
1 A
α
A 3
A
2


P
A
o
M
B
F
♈
♎
Ω
L
Fig. 5.

68. Considérons maintenant trois hypotheses $m = 2$, $m = 2\frac{1}{2}$, & $m = 3$, & les corrections pour l'obliquité de l'écliptique seront:

	si $m = 2$	si $m = 2\frac{1}{2}$	si $m = 3$
$+$ A cos 2 Ψ	A $=$ 0″,58	A $=$ 0″,50	A $=$ 0″,44
$+$ B cos 2 ψ	B $=$ 0, 08	B $=$ 0, 09	B $=$ 0, 10
$+$ C cos θ	C $=$ 8, 96	C $=$ 9, 61	C $=$ 10, 07
$+$ D cos$(2\psi - \theta)$	D $=$ 0, 02	D $=$ 0, 02	D $=$ 0, 02

Or les corrections pour la longitude de $1 + \Upsilon$ seront

	si $m = 2$	si $m = 2$	si $m = 3$
$-$ 𝔄 sin 2 Ψ	𝔄 $=$ 1″,37	𝔄 $=$ 1″,18	𝔄 $=$ 1″,03
$-$ 𝔅 sin 2 ψ	𝔅 $=$ 0, 20	𝔅 $=$ 0, 21	𝔅 $=$ 0, 22
$-$ ℭ sin θ	ℭ $=$ 16, 75	ℭ $=$ 17, 95	ℭ $=$ 18, 81
$-$ 𝔇 sin $(2\psi - \theta)$	𝔇 $=$ 0, 03	𝔇 $=$ 0, 03	𝔇 $=$ 0, 04

69. Ces formules sont parfaitement d'accord avec celles que j'avois trouvées dans le V Volume de nos Mémoires, & partant je ne m'arrêterai plus ici à leur application. Je remarquerai seulement, que la terre n'est pas une masse homogene, puisqu'alors la valeur du nombre n devroit être $= \frac{201}{200}$, qui est pourtant selon toute apparence moindre que $\frac{301}{300}$. D'où il s'ensuit que l'inégalité entre ses momens principaux d'inertie n'est pas aussi grande que si elle étoit homogene, ou bien elle approche plus de la nature d'un globe par la distribution de sa matiere, que par sa figure. Il faut donc que la terre renferme au dedans une matiere plus pesante, & plus également distribuée autour du centre d'inertie. Or c'est aussi tout ce qu'on en peut conclure. Au reste, si la terre ne tournoit pas à peu près autour d'un axe principal, & que ses momens d'inertie par rapport aux deux autres axes principaux ne fussent pas égaux entr'eux, il auroit été presqu'impossible de déterminer son mouvement de rotation.